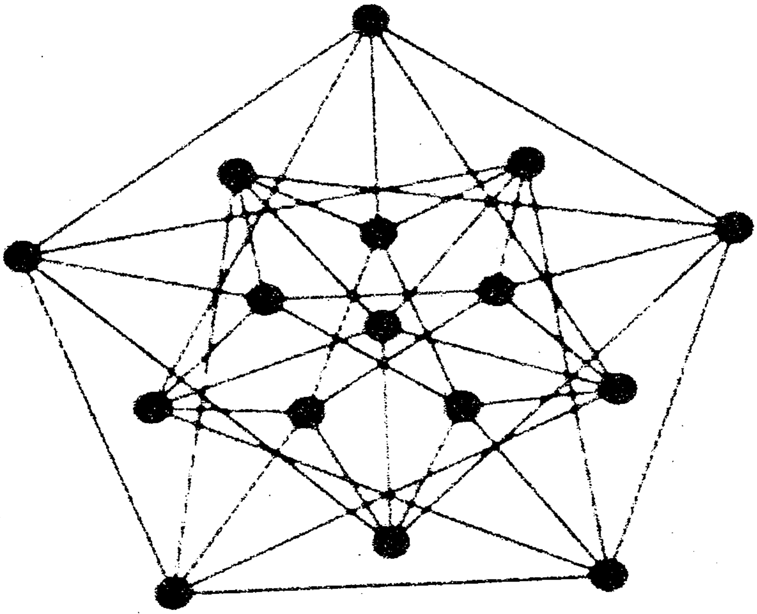
الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي
جامعة تشرين- كلية العلوم

نظرية البيان

GRAPH THEORY



الدكتور رامي شاهين

الدكتور سهيل محفوض

القسم: الرياضيات

السنة: الثالثة

1432-1431 ه

2011-2010 م

محتـــــويات الكتـــــاب

مقدمة

إن أول من درس نظرية البيان كمفهوم رياضي هو عالم الرياضيات أولر, 1736. وفي مطلع القرن العشرين, شهد هذا الفرع من العلوم انطلاقةً واسعة جعلته من العلوم التي أخذت مكانتها في النصف الأخير من القرن الماضي. أهمية نظرية البيان تتجلى بفاعلية هذا العلم في شتى مجالات وفروع العلوم الأخرى وكذلك في الحياة العملية والتطبيقية. كالاتصالات, الشبكات الكهربائية, علوم الحاسب, التخطيط والإدارة, الاقتصاد, النقل, التمركز والسيطرة, نظرية الألعاب, الكيمياء والهندسة.

لاشك أن نظرية البيان من المواضيع الشيقة في الرياضيات الحديثة. إن هذه النظرية تستخدم في أغلب فروع المعرفة. حيث إنها تقدم نموذجاً رياضياً مبسطاً لأي نظام يتضمن عملية ثنائية. أهمية هذا الفرع من فروع العلوم الرياضية التطبيقية, تأتي من قدرته على معالجة وحل الكثير من المسائل المرتبطة بواقع الحياة اليومية وإيجاد الحل الأمثل لها وذلك عن طريق تحويلها إلى نموذج رياضي يسهل التعامل معه. بالإضافة إلى ذلك اعتبار نظرية البيان من أساسيات علوم الحاسب ولاسيما من جهة استخدامه لنموذج الأشجار وبالأخص الأشجار الثنائية.

تناول هذا الكتاب مواضيع متنوعة في نظرية البيان تلبية لحاجة طلاب الرياضيات ويمكن أن يستفيد منه طلاب بعض الاختصاصات الأخرى مثل طلاب المعلوماتية وكليات الهندسة والاقتصاد. كما يقدم عوناً لطلاب الدراسات العليا بما يتضمنه من مواضيع متنوعة تمكن الدارسين من المضي قدماً في مجال البحث بمحتوياتها. ونريد التنويه إلى أن معظم فصول الكتاب تتضمن مسائل (تخمينات) (Conjectures) غير محلولة, يمكن للباحثين العمل عليها واعتمادها مواضيع بحثية. القصد من وضع بعض المسائل البحثية ضمن طيات هذا الكتاب, هو الرغبة في أعطاء طلابنا الأعزاء فكرة عن مضمون البحث العلمي ونزع مابداخلهم من خوف في هذا المجال, وكم من المسائل العلمية يأتي حلها بجهود غير المختصين ونرجوا الله أن يكون لطلابنا نصيبٌ منها.

يتضمن هذا الكتاب عشرة فصول:

- الفصل الأول: يتضمن التعاريف الأساسية في البيان الموجه وغير الموجه, مصفوفات البيان, العمليات على البيانات, بالإضافة لبعض البيانات الخاصة.

- الفصل الثاني: يشتمل على دراسة المسار والمسار المغلق (الحلقات), المسافة في البيان, المسار الأصغر, الترابط والكتل وبعض الخوارزميات التي تبحث في إيجاد المسار الأقصر.

•• الفصل الثالث: يبحث في موضوع الأشجار ويتضمن دراسة الميزات الأساسية للأشجار, الأشجار المولدة للبيان, أشجار القياس الصغرى الموزونة والمسار, الأشجار وعلاقتها بعلوم الحاسب ومنها الأشجار الثنائية وأشجار شفرات هوفمان وكذلك يتناول الأشجار الموجهة.

•• الفصل الرابع: يتناول هذا الفصل موضوع التلوين في البيان ويشتمل على تلوين الرؤوس, تلوين الأضلاع, تلوين الخرائط, دالة التلوين, مجموع التلوين في البيان وبعض خوارزميات التلوين.

•• الفصل الخامس: نقدم في هذا الفصل موضوع البيانات المستوية ويتضمن صيغة أويلر للبيان المستوي, البيان غير المستوي, عددالتقاطع في البيان وسمك البيان.

•• الفصل السادس: في هذا الفصل ندرس بيانات أولر الموجهة وغير الموجهة وسلاسل ديبرويجن لحل مشكلة رحلة ساعي البريد. كما يتناول بيانات هاملتون الموجهة وغير الموجهة ومشكلة البائع المتجول TSP. ويتضمن الفصل بعض الخوارزميات التي توجد دورة أولرية في البيان وبعضها الأخر لإيجاد حلقة هاملتونية.

•• الفصل السابع: نناقش فيه مسألة تحليل البيانات (Decomposition) والذي يتفرع إلى جزئين: تجزئة البيانات ويضم تجزئة بيان عام وتجزئة البيانات الثنائية وفي هذا الجزء نتعرض بإسهاب لتطبيق نظرية هول

(Hall's Theorem) في استقرار الزواج وخوارزمية الاستقرار. ثم يتناول الجزء التالي موضوع تحليل البيانات إلى عوامل (Factorization of Graph).

•• الفصل الثامن: يناقش موضوع السيطرة في البيان ويتضمن سيطرة رؤوس البيان, تخمين فيزينج, السيطرة والاستقلال, تعريف ببعض أنواع السيطرة الأخرى مثل السيطرة الكاملة, السيطرة المترابطة ومجموعات السيطرة المنفصلة في البيان, السيطرة الموزونة الناقصة والمرمزة, السيطرة في البيان الموجه.

•• الفصل التاسع: يدرس موضوع أعداد رامزي ويشتمل على خصائص أعداد رامزي, حساب أعداد رامزي وتلوين رامزي.

•• الفصل العاشر: يعالج موضوع شبكات التدفق وتطبيقاتها ويهتم بالتدفق والقواطع في الشبكات, التدفق الأعظمي والقواطع الصغرى, حل مشكلة التدفق الأعظمي باستخدام مسار ازدياد التدفق وخوارزميات التدفق الأعظمي.

في الختام, وضع هذا الكتاب من أجل إغناء مفاهيم طلاب المرحلة الجامعية الأولى في كليات العلوم والهندسة, بموضوعات البيان. حيث يحتوي بين طياته على مواضيع متنوعة تناولت البيان من الناحيتين الرياضية والخوارزمية ونأمل أن يكون عوناً لهم ومفتاحاً لعلم مازالت بلداننا العربية

مقصرةً في تناوله والغوص بمواضيعه المتنوعة والشيقة. من المعلوم أن لدراسة البيان متعة خاصة ولاسيما تناوله للمشاكل الواقعية بأسلوب رياضي يعطي الدارس الرغبة في المتابعة ومعرفة المزيد. كما يريح الدارسين وبالأخص الطلاب من فكرة الإلزام بتقبل الرياضيات المجردة وذلك بفضل تناول هذا العلم لمواضيع ترتبط بالواقع يمكن تلمسها. وما يجب ذكره هنا, أن نظرية البيان تقدم حلول لكثير من المواضيع الأخرى في شتى علوم المعرفة ولاسيما الرياضية منها. فكثير من المشاكل البحثية تم حلها باستخدام مفاهيم البيان. هنا نريد أن نقدم الدعوة لزملائنا أساتذة الجامعات في الرياضيات والهندسة بالاطلاع على هذا التخصص والإيفادة منه, وإن شاء الله سيكون عوناً لهم في حل الكثير من مشاكل مواضيعهم البحثية. ونحن شاكرين لكل توجيه ممن يرى بين طياته خطأً أو قصوراً, فالكمال لله صاحب الجلالة.

وأخيراً نأمل أن نكون قد وفقنا بعون الله بوضع لبنة في طريق انتشار هذا الفرع من علوم المعرفة في خدمة أمتنا العربية. والله من وراء القصد.

المؤلفان

الفصـــل الأول

البيـــان

GRAPH

نستعرض في هذا الفصل التعاريف الأساسـية فـي البيـان والمصـفوفات المعرفة على البيان، العمليات على البيان، متتالية الدرجات وبعض البيانات التـي تملك صفات خاصة.

(1-1) تعاريف:

إذا كانت $V \neq \phi$ مجموعة كيفية من النقاط و E مجموعة من الخطوط التي تصل بين أزواج نقاط المجموعـة V. نسـمي الشـكل الهندسـي المؤلـف مـن المجموعتين V و E بياناً ونرمز له G(V, E). ونسمي المجموعـة V مجموعـة رؤوس أو ذرى (vertices) وكل نقطة تسمى رأسـاً (vertex) والمجموعـة E مجموعة الأضلاع (edges) وحيث كل منها يسمى ضلعاً (edge). يمكـن لهـذه الأضلاع أن تكون موجهة وعندئذ يسمى البيان، بياناً موجهاً (Directed Graph) أو اختصارا (Digraph). عندما لايحتوي البيان على أضلاع موجهه يسمى بياناً غير موجه (undirected graph) وسنصطلح على تسمية النوع الأخير بالبيـان G (Graph). سنرمز للبيان بـ G(V, E) الذي له مجموعة الرؤوس $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ ومجموعة الأضلاع $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_q\}$ ويدعى عدد الرؤوس $|V| = p$ برتبة (order) البيان وعدد الأضلاع $|E| = q$ بقياس (size) البيان، لذلك يمكن أن نكتب G(p, q) بهدف التعبير عن بيـان لـه p رأس و q ضلع.

نقول عن الرأسين v و u إنهما متجاوران (adjacent) إذا وجد ضلع e يصل بينهما وعندئذ نكتب $e = vu$ أو $e = (v, u)$ وهذا يعني أنه يوجد ضلع يصل بين الرأسين v و u وهما في هذه الحالة نهايتا الضلع e وعندئذ نقول عن الضلع e إنه يقع على الرأسين v و u. عندما لايوجد أي ضلع بين v و u فإنهما غير متجاورين (لايهم طول الضلع أو شكله، مستقيما أم منحنيا بشرط لايقطع نفسه، كذلك لايوجد فرق في ترتيب الثنائية (v, u) أو (u, v) عندما يكون البيان G غير موجه). إذا كان الضلعان e_1 و e_2 مشتركين برأس واحد، عندئذ نقول عنهما إنهما متجاوران وألا يكونا غير متجاورين.

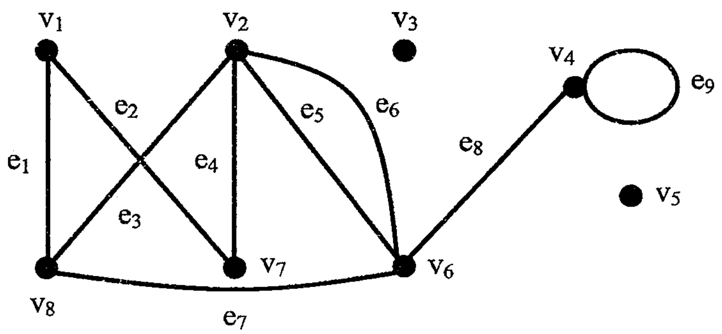
ملاحظة (1-1): سوف نستخدم في دراستنا للبيان، دوائر صغيرة للتعبير عن الرؤوس وخطوط مستقيمة أو منحنية لاتقطع نفسها للتعبير عن الأضلاع.

عدد الأضلاع المشتركة مع الرأس $v \in V(G)$ هو درجة (degree) الرأس v ونرمز لذلك $deg(v)$ أو $\rho(v)$, ولأكبر درجة رأس في البيان (max degree) $\Delta(G)$, ولأصغر درجة رأس (min degree) $\delta(G)$. الرأس من الدرجة 1 يدعى رأس طرفي (end vertex), والرأس من الدرجة 0 رأس معزول (isolated vertex).

إذا كان يصل بين رأسين v و u أكثر من ضلع عندئذ نقول إنه يوجد ضلع مضاعف بينهما (multiple edge) وعندئذ يكون البيان G(V, E) مضاعفاً (multiple graph). إذا احتوى البيان على ضلع يصل رأس ما بنفسه ندعو هذا الضلع عروة (loop) وعندئذ يدعى البيان، بياناً بعروات (loop graph). البيان البسيط (simple graph) هو بيان لايحتوي على أضلاع مضاعفة أو لفات. يدعى البيان الذي لايحتوي على أضلاع، بياناً فارغاً (empty-graph) وإذا كان $p = 1$ و $q = 0$ فالبيان تافه (trivial-graph).

إذا كان للبيان G عدد منته من الأضلاع فيدعى بياناً منتهياً finite graph) ويدعى بياناً غير منته (infinite) عندما يكون عدد الأضلاع غير منته. نستنج من هذا التعريف أنه يمكن لبيان منته أن يحتوي على عدد غير منته من الرؤوس.

مثال (1-1): نلاحظ من الشكل (1-1)



الشكل (1-1)

مجموعة الرؤوس $V(G) = \{v_1, v_2, v_3 , v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$

مجموعة الأضلاع $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$

$order(G) = |V(G)| = p = 8,$

$size(G) = |E(G)| = q = 9,$

$\rho(v_1) = \rho(v_7) = 2, \rho(v_4) = \rho(v_8) = 3,$

$\rho(v_2) = \rho(v_6) = 4, \rho(v_3) = \rho(v_5) = 0,$

$\delta(G) = 0, \Delta(G) = 4.$

نلاحظ أن الرأسين v_1 و v_2 غير متجاورين وكذلك v_3 و v_7 وهناك رؤوس أخرى غير متجاورة فيما بينها. كذلك الضلعين e_1 و e_5 غير متجاورين، e_2 و e_6 غير متجاورين وهناك ثنائيات من الأضلاع غير متجاورة.

كما أن الضلعين e_5 و e_6 يشكلان ضلعاً مضاعفاً بين الرأسين v_2 و v_6 والضلع e_9 هو عروة. أخيراً، نجد الرأسين v_3 و v_5 منعزلين.

هناك علاقة بين مجموع درجات رؤوس البيان وعدد أضلاعه توضحها المبرهنة التالية لعالم الرياضيات أويلر.

مبرهنة (1-1): ليكن البيان $G(V, E)$ حيث $|V| = p$ و $|E| = q$، عندئذ

$$\sum_{i=1}^{p} \rho(v_i) = 2q.$$

البرهان: كل ضلع يشترك مع رأسين مختلفين أو متساويين، فهو يشارك بدرجتين في مجموع درجات الرؤوس للبيان G. نستنتج إن مجموع درجات الرؤوس يساوي ضعفي عدد الأضلاع.

نتيجة (1-1): ليكن البيان $G(V, E)$، عندئذ عدد الرؤوس الفردية الدرجة يكون عدداً زوجياً.

البرهان: ينتج بسهولة من المبرهنة (1-1) ويترك كتمرين للطالب.

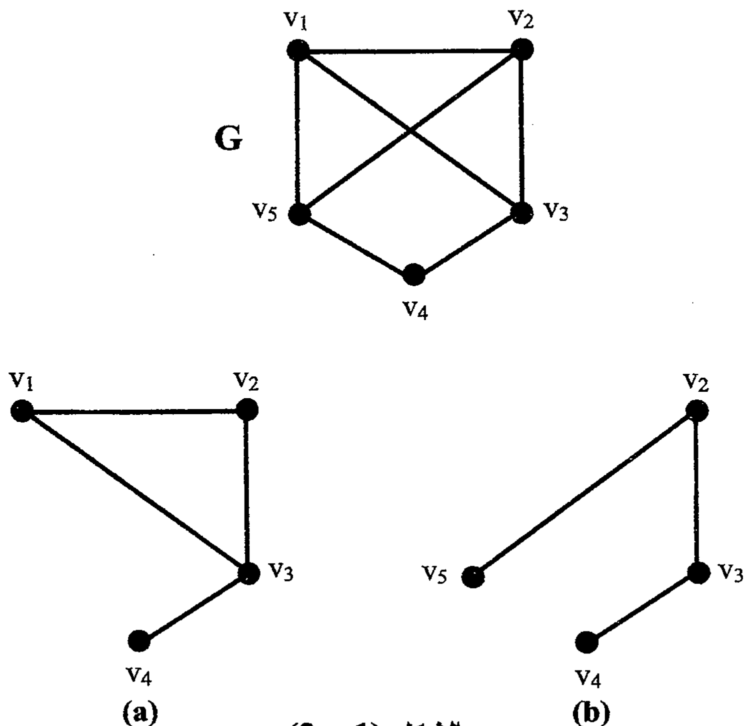
ملاحظة (1-2): بشكل عام سنرمز بـ $G(V, E)$ أو $G(p, q)$ للبيان المنتهِ وغير الموجه مالم نذكر خلافاً لذلك.

نقول عن البيان $H(V, E)$ إنه بيان جزئي (subgraph) من البيان $G(V, E)$ إذا كان $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ ونرمز لذلك $H \subseteq G$. إذا كان $V(H) = V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$، عندئذ نسمي H بياناً جزئياً موسعاً (spanning subgraph) للبيان G.

لتكن W مجموعة غير خالية من مجموعة رؤوس البيان $G(V, E)$. البيان الجزئي $H_1(W, E_1)$ حيث E_1 مجموعة الأضلاع التي تقع على الرؤوس W في البيان G

يسمى البيان الجزئي المحدث بالرؤوس W (vertex-induced subgraph) ونرمز لذلك $H_1 \cong \langle W \rangle$. بنفس الشكل نعرف البيان الجزئي $H_2(W_1, F)$ المحدث بالأضلاع F (edge-induced subgraph), حيث $(F \subseteq E(G))$ و W_1 مجموعة الرؤوس من $V(G)$ التي تقع على الأضلاع F في البيان $G(V, E)$ ونرمز لذلك $H_2 \cong \langle F \rangle$.

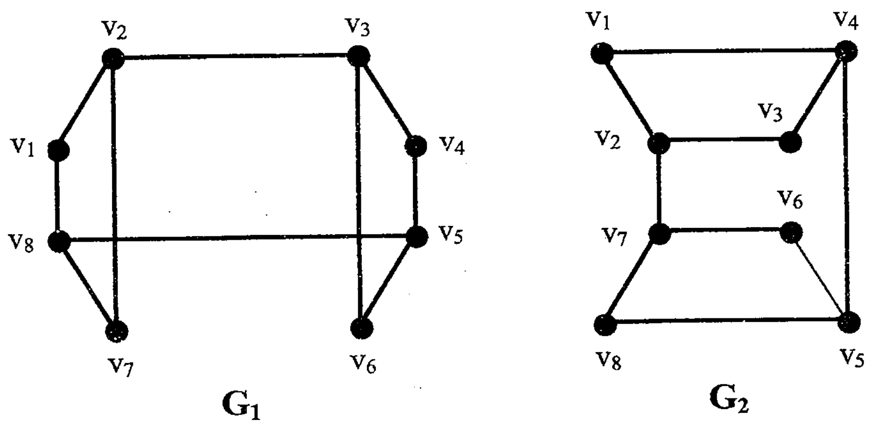
لاحظ الشكل (2-1) حيث $W = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ مجموعة الرؤوس والشكل (2-1)(a) البيان الجزئي المحدث بالرؤوس W من البيان G. ومجموعة الأضلاع $F = \{(v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_3, v_4)\}$ والشكل (2-1)(b) البيان الجزئي المحدث بالأضلاع F من البيان G.



الشكل (2 – 1)

نقــول عــن البيــانين $G_1(p_1,\ q_1)$ و $G_2(p_2,\ q_2)$ إنهمــا متمــاثلان (isomorphism) إذا وجد تقابل Φ بين مجموعتي الــرؤوس $V(G_1)$ و $V(G_2)$ يحافظ على التجاور، هذا يعني أنه لأجــل أي رأســين $v,\ u \in V(G_1)$، إذا كــان $vu \in E(G_1)$ عندئذ $\Phi(v)\Phi(u) \in E(G_2)$، ونقول إن G_1 يماثــل (isomorphic) G_2 ونكتب $G_1 \cong G_2$. نلاحظ أن علاقة التماثل هي علاقة تكافؤ تقسم البيانات إلى صفوف تكافؤ ويكون البيانان غير متماثلين عندما ينتميان إلى صفين مختلفين.

مثال (1-2): ليكن البيانان الموضحان في الشكل (1-3).



الشكل (1– 3)

نلاحظ أن التقابل $\Phi : V(G_1) \to V(G_2)$ المعرف بالشكل التالي:

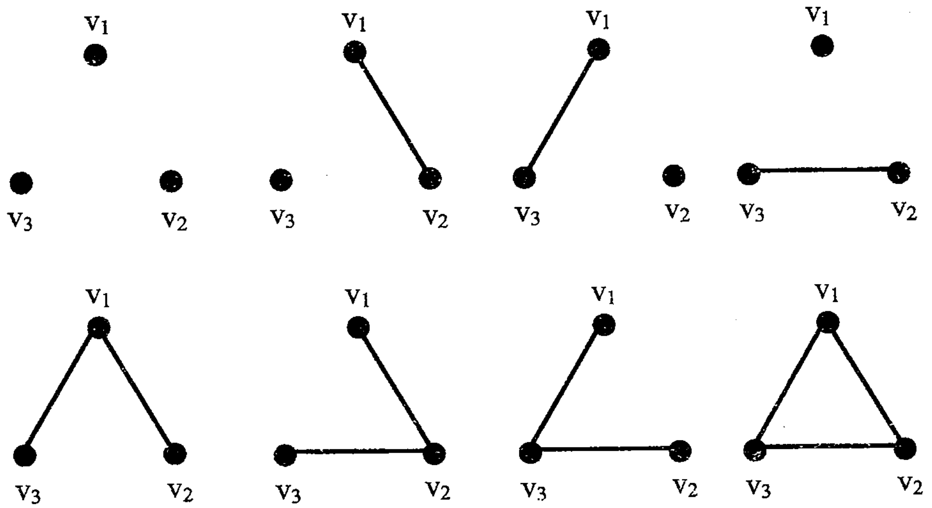
$$\Phi(v_1) = v_1, \Phi(v_2) = v_4, \Phi(v_3) = v_5, \Phi(v_4) = v_6,$$

$$\Phi(v_5) = v_7, \Phi(v_6) = v_8, \Phi(v_7) = v_3, \Phi(v_8) = v_2,$$

يحافظ على التجاور ومنه نستنتج أن G_1 و G_2 متماثلان، أي أن $G_1 \cong G_2$.

البيانـــان G_1 و G_2 متطابقـــان (identical) إذا كـــان $V(G_1) = V(G_2)$ و $E(G_1) = E(G_2)$ ونرمز لذلك $G_1 = G_2$. البيانين فـــي الشـــكل (1-3) غيـــر متطابقين مع العلم أنهما متماثلان و $V(G_1) = V(G_2)$، لكـــن $E(G_1) \neq E(G_2)$، على سبيل المثال $v_1v_8 \in E(G_1)$ و $v_1v_8 \notin E(G_2)$.

مثال (1-3): البيانات غير المتطابقة المكونة من ثلاثة رؤوس كما تظهر في الشكل (1-4):



الشكل (1– 4)

نلاحظ أن عدد البيانات غير المتطابقة على ثلاثة رؤوس هو ثمانية وهذا يوضح كما يلي: أكبر عدد لأضلاع بيان بسيط على ثلاثة رؤوس هو ثلاثة أضلاع وبالتالي يمكن أن يكون هناك بيان بدون أضلاع وهذا ينتج بياناً واحداً، بيان بضلع واحد ينتج ثلاثة بيانات، بيان بضلعين ينتج ثلاثة بيانات (هي عدد حالات وجود ضلعين من ثلاثة أضلاع)، بيان بثلاثة أضلاع ينتج بياناً واحداً وبالتالي نجد عدد

البيانات غير المتطابقة على ثلاثة رؤوس يكون $\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}=1+3+3+1=8$ ومنه نستنتج عدد البيانات غير المتطابقة على p رأس هو $\sum_{i=0}^{q}\binom{q}{i}$ حيث $q = p(p-1)/2$. ونرمز لعدد البيانات غير المتطابقة على p رأس و q_1 من الأضلاع $(0 \le q_1 \le p(p-1)/2)$، (p, q_1)- بيان غير متطابق. في المثال (1-3)، يوجد ثلاثة بيانات (3, 2)- بيانات غير متطابقة.

ملاحظة (1-3): البيانات المتماثلة ليس بالضرورة أن تكون متطابقة كما في المثال (1-3)، لكن البيانات المتطابقة تكون متماثلة.

ليكن $G(V, E)$. إذا أمكن تجزئة مجموعة رؤوسه إلى مجموعتين جزئيتين V_1 و V_2 بحيث لايوجد ضلع يصل بين أي رأس من V_1 برأس من V_2، عندئذ نقول إن G بيان غير مترابط (disconnected) ونسمي كل بيان جزئي مترابط على مجموعة الرؤوس V_1 أو V_2، مركبة من البيان G. مركبات البيان G هو عدد البيانات الجزئية المترابطة والمنفصلة فيما بينها ونرمز لعدد المركبات بـ $k(G)$.

(1-2) البيانات والمصفوفات (Graphs and Matrices).

هناك العديد من المصفوفات التي يمكن استخدامها لتمثيل البيانات (الموجهة وغير الموجهة) وهذه المصفوفات تبين العلاقة بين الرؤوس أو بين الأضلاع أو بين الرؤوس والأضلاع معاً. ليكن $G(p, q)$ بياناً غير موجه على مجموعة الرؤوس $V(G) = \{v_1, \ldots, v_p\}$ ومجموعة الأضلاع $E(G) = \{e_1, \ldots, e_q\}$.

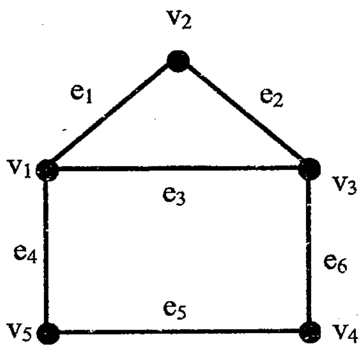
a) مصفوفة التجاور (Adjacency Matrix): هي مصفوفة مربعة من القيـــاس $p\times p$ ومعرفة بالشكل $A(G) = [a_{ij}]$، حيث a_{ij} هو عدد الأضلاع التي تصل بين الرأسين v_i و v_j. نلاحظ المصفوفة $A(G)$ متناظرة. بالتأكيد أن لكل بيان مصفوفة مربعة متناظرة عناصرها أعداد صحيحة غير سالبة وبالتالي كل مصفوفة مربعـــة متناظرة من الأعداد الصحيحة غير السالبة تكون مصفوفة تجاور بياناً ما. إذا كان البيان G بياناً بسيطاً عندئـــذ $A(G)$ تكـــون $(1, 0)$-مصـــفوفة متنـــاظرة، (أي أن عناصر المصفوفة هي 1 و 0 فقط) و $a_{ii} = 0$ لأجل $i = 1, 2, \ldots, p$.

b) مصفوفة التجاور للأضلاع (Edge-Adjacency Matrix): هي مصـــفوفة من القياس $q\times q$ ومعرفة بالشكل $M(G) = [m_{ij}]$، حيث $m_{ij} = 1$، إذا كان الضلع e_i مجاوراً للضلع e_j و $m_{ij} = 0$، وإذا كان الضلعان e_i و e_j غير متجـــاورين. واضح أن المصفوفة متناظرة وأن $m_{ii} = 0$ من أجل $i = 1, 2,\ldots, q$.

d) مصفوفة التقاطع (Incidence Matrix): هي مصفوفة من القيـــاس $p\times q$ ومعرفة بالشكل $B(G) = [b_{ij}]$، حيث $b_{ij} = 1$ إذا كان الـــرأس v_i واقعـــاً علـــى الضلع e_j و $b_{ij} = 0$ وإذا كان الرأس v_i لايقع علـــى الضـــلع e_j. وإذا كـــان البيان $G(p, q)$ لايحتوي على لفات فإن مجموع عناصر كل عمود يكون 2 وهذا يتضح من وقوع الضلع على رأسين فقط، كذلك مجموع عناصر كل سطر يساوي درجة الرأس الموافق لذلك السطر.

c) مصفوفة الدرجة (Degree Matrix): هي مصفوفة من القياس $p\times p$ ومعرفة بالشكل $C(G) = [c_{ij}]$، حيث $c_{ii} = \deg(v_i)$ لأجل $i = 1, 2, \ldots, p$ و $c_{ij} = 0$ عندما $i \neq j$.

مثال (1-4): أوجد مصفوفات التجاور، التجاور للأضلاع، الوقوع، الدرجة للبيان في الشكل (1-5).



الشكل (1 -5)

$$A(G)=\begin{bmatrix}0&1&1&0&1\\1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\1&0&0&1&0\end{bmatrix},$$

مصفوفة التجاور

$$M(G)=\begin{bmatrix}0&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&0&1\\1&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&1\\0&1&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

مصفوفة التجاور للأضلاع

$$B(G)=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&0\end{bmatrix},$$

مصفوفة الوقوع

$$C(G)=\begin{bmatrix}3&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&2\end{bmatrix}$$

مصفوفة الدرجة

مبرهنة (1-2): إذا كان $G(V, E)$ غير فارغ، عندئذ $B \times B^t = A + C$.

البرهان: العنصر (i, j) في المصفوفة $B \times B^t$ هو عبارة عن جداء السطرين i و j

للمصفوفة B. ‏(i, i) في المصفوفة $B \times B^t$ هو درجة الرأس v_i في البيان G (لأن العنصر (i, i) ينتج عن جداء سطر العنصر بنفسه وحيث إن مجموع عناصر السطر i يساوي درجة الرأس v_i).

ليكن $i \neq j$، عندئذ نميز حالتين:

1) $v_iv_j \in E(G)$، عندئذ العنصر (i, j) في المصفوفة $B \times B^t$ يكون 1 (لأنه يوجد بين سطري الرأسين v_i و v_j توافق برقم 1 وهو يعبر عن رقم الضلع الذي يصل بينهما).

2) $v_iv_j \notin E(G)$، عندئذ العنصر (i, j) في المصفوفة $B \times B^t$ يكون 0 (لأنه لا يوجد بين الرأسين v_i و v_j أي ضلع وبالتالي لايوجد توافق بقيمة 1 بين سطر الرأس v_i وسطر الرأس v_j). أخيراً نستنتج أن $B \times B^t = A + C$.

(3-1) بيانات خاصة (Special Graphs).

هناك أنواع من البيانات التي تملك ميزات خاصة، سوف نورد بعضاً منها وهو الأكثر شيوعاً. ليكن G(p, q) بياناً بسيطاً غير موجه، حيث مجموعة رؤوسه $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ ومجموعة أضلاعه $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_q\}$.

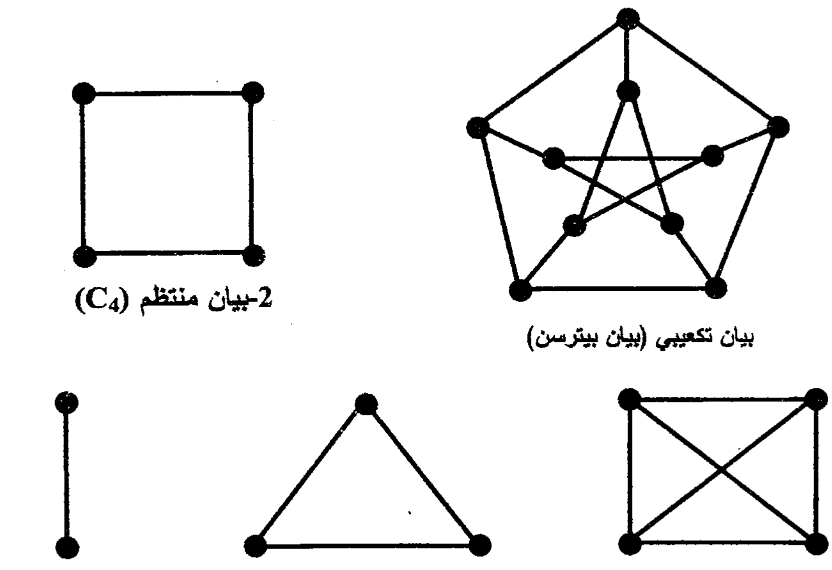
1) **البيان المنتظم (Regular Graph)**: نقول عن البيان G(p, q)، إنه منتظم من الدرجة r حيث ($0 \leq r < p$)، إذا كان لكل رأس في البيان الدرجة r ونرمز لذلك r–بيان منتظم (r-regular graph). إذا كان r = 3 فيدعى بياناً ثلاثياً (تكعيبي) (cubic graph). كل r–بيان منتظم له pr/2 ضلع، لاحظ الشكل (1-6).

2) **الحلقة (Cycle)**: هي بيان متصل ومنتظم من الدرجة 2. نرمز للحلقة التي لها n رأس، C_n. إذا كان لدينا حلقة C_n ورأس يجاور جميع رؤوسها، عندئذٍ

نحصل على عجلة (wheel) ونرمز لها W_n. للعجلة W_n، $n+1$ رأس. مــاهو عدد أضلاع الحلقة والعجلة من المرتبة n و $n+1$ على الترتيب ؟.

3) **المسار (Path)**: هو حلقة حُذف منها ضلع وبالتــالي للمســار P_n، n رأس و $n-1$ ضلع.

4) **البيان التام (Complete Graph)**: نقول عــن $G(p, q)$ إنــه بيــان تــام (complete graph) إذا كان كل رأس في البيان يجــاور جميــع رؤوس البيــان الأخرى وهذا ينتج أن لكل رأس الدرجة $p-1$. نلاحظ أن البيان التــام هــو بيــان منتظم من الدرجة $p-1$ وبالتالي عدد أضلاعه $p(p-1)/2$ وهو أكبر عدد أضلاع لبيان بسيط له p رأس. نرمز K_p للبيان التام على p رأس. لاحظ الشكل (6-1).



2-بيان منتظم (C_4)

بيان تكعيبي (بيان بيترسن)

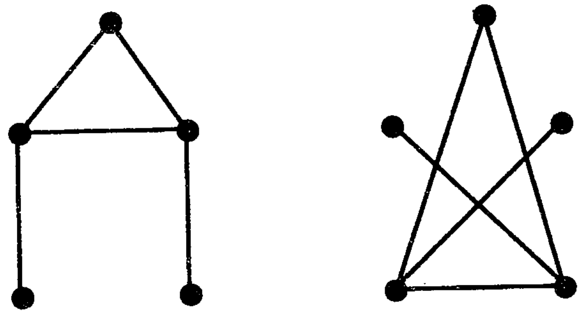
k_2(1-بيان منتظم)

k_3 (2-بيان منتظم (C_3))

K_4(3-بيان منتظم)

الشكل (6-1)

5) البيان المتمم للبيان G(p, q) **(Complement Graph)**: نقول عن البيـــان $\overline{G}$، إنه متمم للبيان G، إذا كان له مجموعة الرؤوس V(G) ولأجل أي رأســين $v, u \in V(G)$ يكون $vu \in E(\overline{G})$ إذا وفقط إذا كان $vu \notin E(G)$. إذا كان البيـــان G(p, q)، عندئذ $\overline{G}(p,\overline{q})$ يكون البيان المتمم، حيث $q+\overline{q}=\binom{p}{2}$. نقــول عــن البيان G إنه متمم لذاته (self-complementary)، إذا كـــان $G \cong \overline{G}$. البيـــان المتمم للبيان التام هو بيان فارغ والعكس صحيح، كذلك البيان المتمم للبيان المنتظم هو بيان منتظم. البيان G في الشكل (1-7)، متمم لذاته.



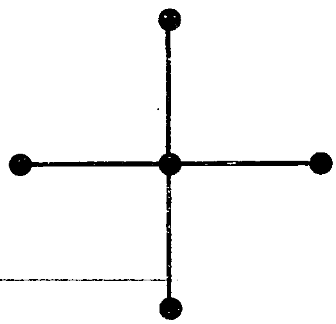
G G

الشكل (1– 7)

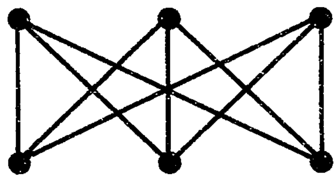
6) البيان n-تجزئة **(n-partite Graph)**: ليكن البيان G(E, V)، إذا تمكنا من تجزئة مجموعة رؤوس البيان V(G) إلى n مجموعة جزئية $V_1, \ldots, V_n$ بحيــث إن كل ضلع من E(G) يصل رأس من المجموعـــة V_i (i =1, 2, …, n) إلـــى رأس من المجموعة V_j (j = 1, 2, …, n) بشرط $i \neq j$، عندئذ نسمي البيان G بيان n–تجزئة (إي أن رؤوس المجموعة الواحـــدة V_i حيـــث (i = 1, 2, …, n) لاتتصل مع بعضـــها). إذا كـــان n = 2، عندئـــذ البيـــان G يـــدعى 2–تجزئـــة (bipartite graph). البيان n–تجزئة التام (Complete n-partite Graph) هو بيان n–تجزئة مع إضافة خاصية، لأجل أي رأسين u_i و u_j مـــن V(G) ...

$u_iu_j \in E(G)$ إذا وفقط إذا كان $u_i \in V_i$ و $u_j \in V_j$ بشرط $i \neq j$ وحيث $i, j = 1, 2, \ldots, n$. إذا كان $|V_i| = p_i$ عندئذ البيان n-تجزئة التام نرمز له $k(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. عندما يكون $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$ فإن $k(p_1, p_2, \ldots, p_n) = k(1, 1, \ldots, 1) = K_n$.

في حالة كون البيان G له مجموعتان $|V_1| = m$ و $|V_2| = n$ فإن البيان يدعى 2-تجزئة تام (Complete bipartite graph) ونرمز له $k(m, n)$. البيان $k(1, m)$ يدعى نجمة (star). لاحظ الشكل (1-8).



k(1, 4)



K(3, 3)

الشكل (1-8)

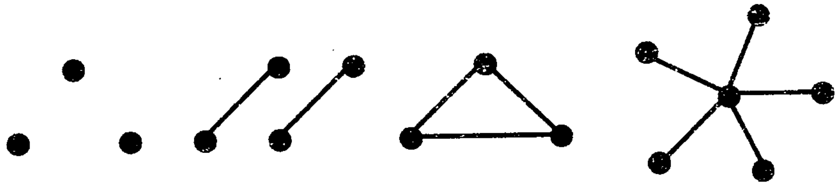
(1-4) العمليات على البيانات (Operations on Graphs).

هناك عمليات تطبق على البيانات فتنتج بياناً جديداً. ليكن $G_1(V, E)$ و $G_2(V, E)$ بيانين، عندئذٍ نقول إنهما منفصلان (disjoint) إذا كان $V(G_1) \cap V(G_2) = \phi$ ونقول إنهما منفصلان بالنسبة للأضلاع إذا كان $E(G_1) \cap E(G_2) = \phi$. نلاحظ أن البيانين المنفصلين يكونان منفصلين بالنسبة للأضلاع، هل العكس صحيح ؟.

ليكن $G_1(V, E)$ و $G_2(V, E)$ بيانين منفصلين، عندئذٍ نعــرف العمليــات التالية:

1) اتحاد بيــانين (union graphs): البيان $G(V, E)$ يكون اتحاداً للبيــانين G_1 و G_2 إذا كان $V(G) = V(G_1)\cup V(G_2)$ و $E(G) = E(G_1)\cup E(G_2)$ ونرمــز لذلك $G = G_1\cup G_2$. إذا كان البيان G يتكون من n نسخة منفصلة من البيان H، عندئذ نكتب $G = nH$. لاحظ الشكل (1-9) يوضح أن

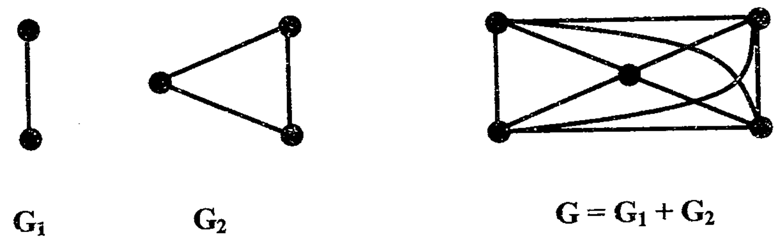
$G = 3K_1\cup 2K_2\cup K_3\cup k(1, 5)$.



الشكل (1-9)

2) ربط البيانات (join graphs): نعرف ربط البيــانين G_1 و G_2 بأنــه البيــان $G = G_1 + G_2$ حيث له مجموعة الرؤوس $V(G) = V(G_1)\cup V(G_2)$ ومجموعة الأضـــلاع $E(G) = E(G_1)\cup E(G_2)\cup\{uv : u\in V(G_1) \text{ and } v\in V(G_2)\}$.

لاحظ الشكل (1-10). هل $K(m,n)=\overline{K}_m+\overline{K}_n$ ؟.

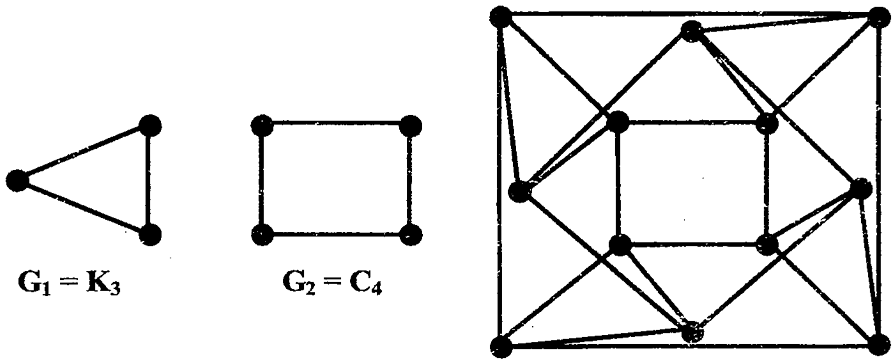


الشكل (1-10)

3) **الجداء الديكارتي (Cartesian product)**: الجداء الــديكارتي للبيــانين G_1 و G_2 هو البيان $G = G_1 \times G_2$ مع مجموعة الــرؤوس $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ ومجموعة الأضلاع

$$E(G) = \{(u_1, u_2)(v_1, v_2) : v_1 = u_1 \text{ and } v_2u_2 \in E(G_2) \text{ or } v_2 = u_2 \text{ and } v_1u_1 \in E(G_1)\}.$$

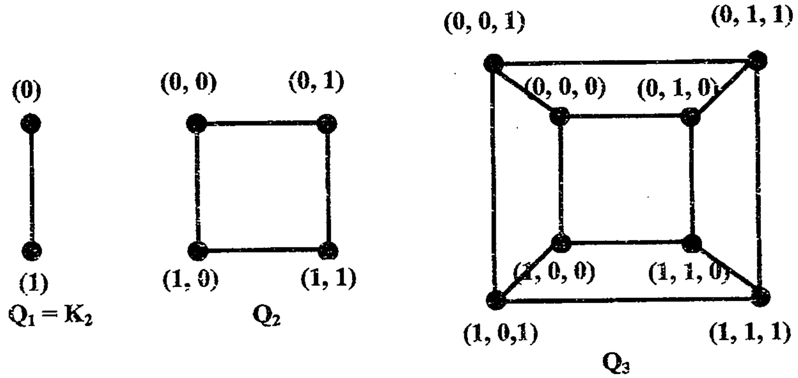
لاحظ الشكل (1-11). هل $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$.



الشكل (1-11)

هناك نوع من البيانات له أهمية خاصة يدعى البيانات التكعيبية (cubes) ينتج من تعريف الجداء الديكارتي للبيانات ويرمــز لــه Q_n. Q_n (n-cube) يكــون K_2 عندما $n = 1$، أي أن $Q_1 = K_2$. إذا كان $n > 1$ نعرف Q_n بشكل متتــابع، أي أن $Q_n = Q_{n-1} \times K_2$ وهو بيان منتظم من المرتبــة 2^n والدرجــة n، كمــا أن رؤوس البيان مرتبة وفق متجه $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ حيــث $(a_i = 0 \text{ or } 1)$ لأجــل $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ويكون الرأسان متجاورين إذا اختلفا بمركبة واحدة فقــط مــن مركبات متجهي الرأسين. لبناء Q_n نأخــذ نســختين مــن Q_{n-1} (الأولــى Q^0_{n-1} والثانية Q^1_{n-1}) حيث Q^0_{n-1} تكون نسخة من Q_{n-1} بعد إضافة المركبة n وقيمتهــا

الصفر إلى كل متجه يعبر عن رأس. Q^1_{n-1} تكون نسخة من Q_{n-1} بعد إضافة المركبة n وقيمتها 1 إلى كل متجه يعبر عن رأس. الآن نضيف ضلعاً بين كل رأسين اختلفا بمركبة واحدة لها نفس الترتيب وهي المركبة ذات الرتبة n (الرأسان هما نفس الرأس قبل إضافة المركبة n). لاحظ الشكل (1-12).

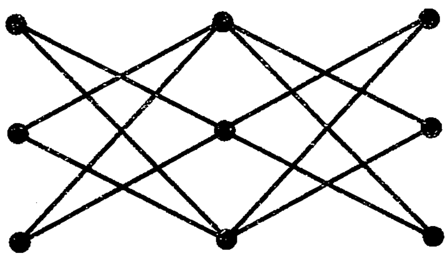


الشكل (1-12)

4) **الجداء المباشر (Direct product)**: الجداء المباشر للبيانين G_1 و G_2 هو البيان $G = G_1 \bullet G_2$ مع مجموعة الرؤوس $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ ومجموعة الأضلاع

$$E(G) = \{(u_1, u_2)(v_1, v_2) : u_1v_1 \in E(G_1) \text{ and } u_2v_2 \in E(G_2)\}.$$

لاحظ الشكل (1-13) هو ناتج $C_3 \bullet P_3$.

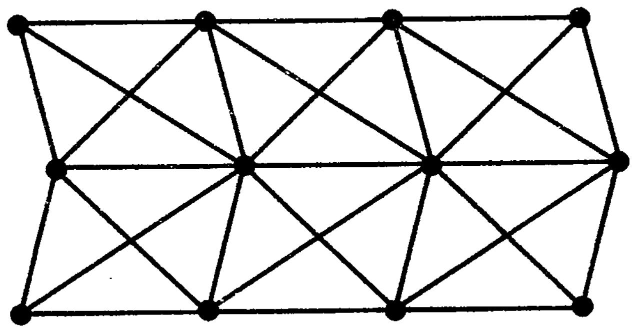


الشكل (1-13)

5) **الجداء القوي (Strong product)**: الجداء الشديد للبيانين G_1 و G_2 هو البيان $G = G_1 \otimes G_2$ مع مجموعة الرؤوس $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ ومجموعة الأضلاع

$$E(G) = \{(u_1, u_2)(v_1, v_2) : v_1 = u_1 \text{ and } v_2u_2 \in E(G_2) \text{ or } v_2 = u_2 \text{ and } v_1u_1 \in E(G_1) \text{ or } u_1v_1 \in E(G_1) \text{ and } u_2v_2 \in E(G_2)\}.$$

لاحظ الشكل (14-1) هو ناتج $P_3 \otimes P_4$.

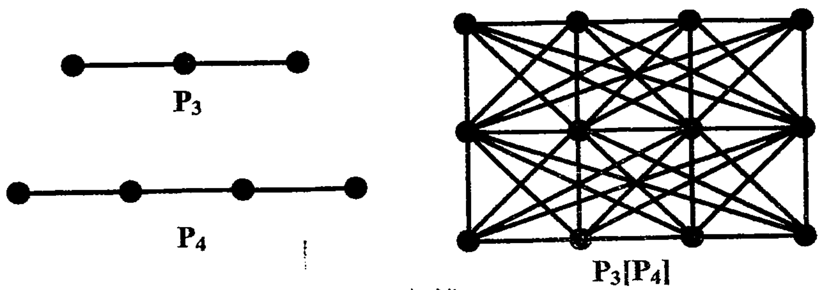


الشكل (14-1)

6) **الجداء المركب (Lexicographic product or Composition)**: الجداء المركب للبيانين G_1 و G_2 هو البيان $G = G_1[G_2]$ مع مجموعة الرؤوس $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ ومجموعة الأضلاع

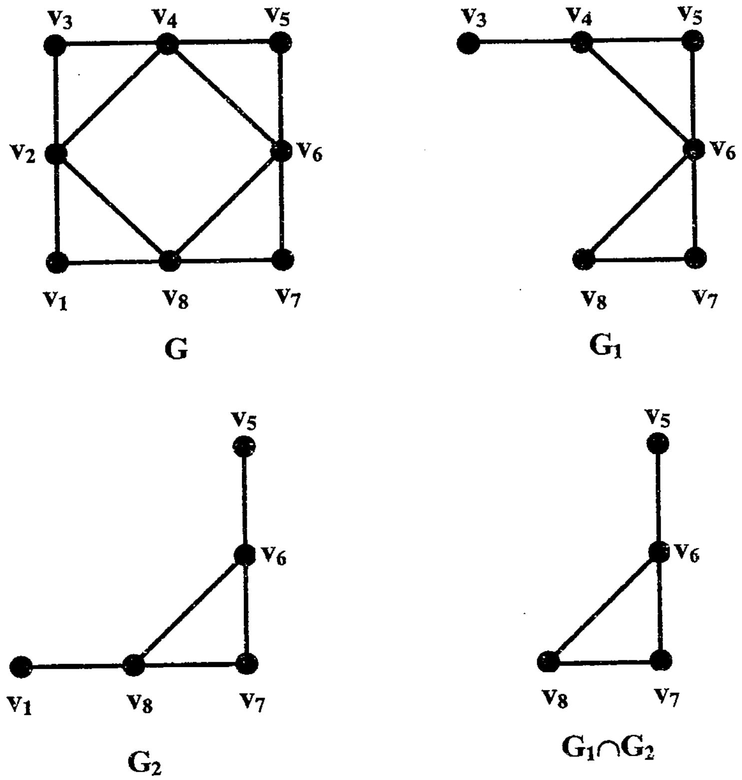
$$E(G) = \{(u_1,u_2)(v_1,v_2): u_1v_1 \in E(G_1) \text{ or } u_1 = v_1 \text{ and } v_2u_2 \in E(G_2)\}$$

لاحظ الشكل (15-1). هل $G_1[G_2] \cong G_2[G_1]$، ؟.



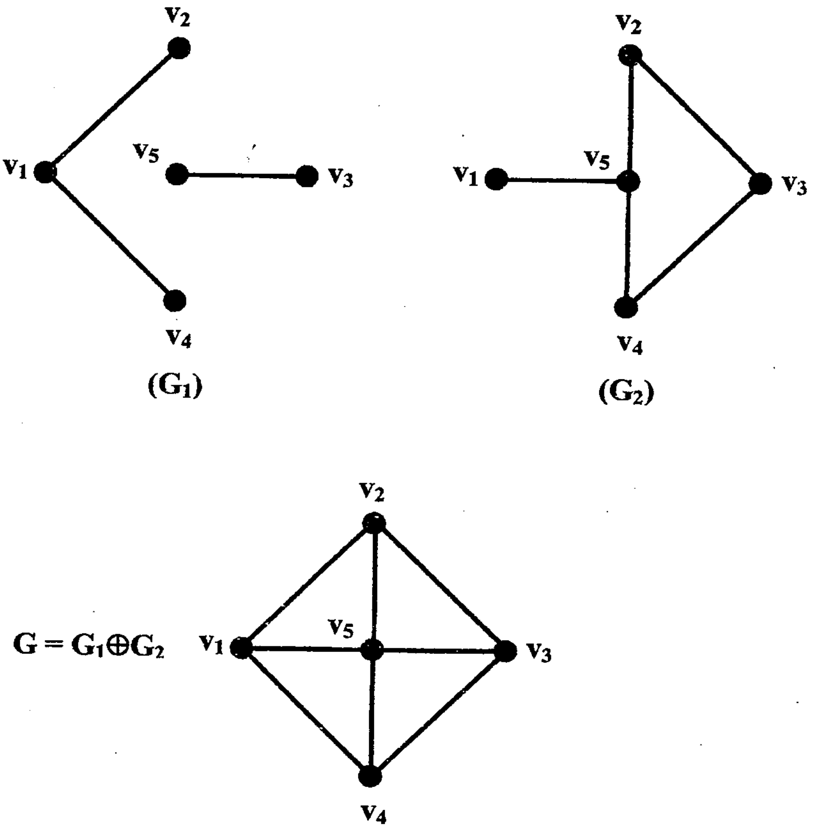
الشكل (15-1)

7) تقاطع البيانات (Intersection graphs): ليكن البيانان الجزئيان G_1 و G_2 من البيان G وليكن $V(G_1)\cap V(G_2) \neq \phi$، عندئذ بيان تقاطع G_1 و G_2 نرمز له $G_1\cap G_2$، هو بيان جزئي من G لــه مجموعــة الــرؤوس $V(G_1) \cap V(G_2)$ ومجموعة الأضلاع $E(G_1)\cap E(G_2)$. يمكن تعميم التقاطع على عدد منتــهٍ مــن البيانات الجزئية من G، إذا كان $G_1, G_2, \ldots, G_k$ بيانات جزئية من G، عندئــذٍ $\cap_{i=1}^{k} G$ هو بيان جزئي من G له مجموعة الرؤوس $\cap_{i=1}^{k} V(G_i)$ ومجموعــة الأضلاع $\cap_{i=1}^{k} E(G_i)$. لاحظ الشكل (1-16).



الشكل (1-16)

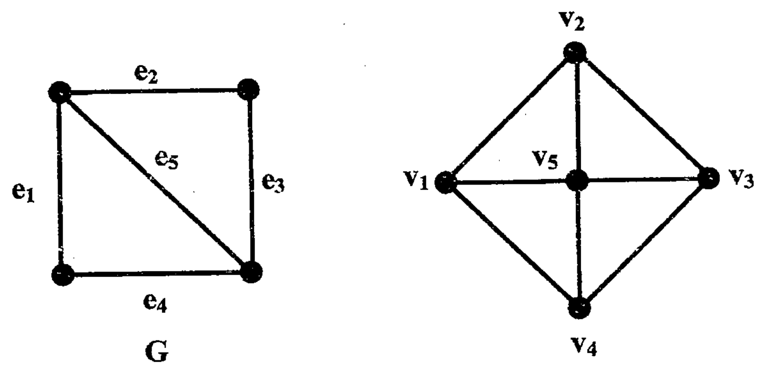
8) جمع أضلاع بيانين **(The edge sum of two graphs)**: ليكن البيانان G_1 و G_2 بحيث إن $V(G_1) = V(G_2)$ و $E(G_1) \cap E(G_2) = \phi$، عندئذٍ نعرف عملية جمع أضلاع G_1 و G_2 بأنـــه البيـــان $G = G_1 \oplus G_2$ مـــع مجموعـــة الـــرؤوس $V(G) = V(G_1) = V(G_2)$ ومجموعة الأضلاع هي اجتماع أضـــلاع البيـــانين $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. لاحظ الشكل (1-17).



الشكل (1-17)

9) منقول بيان **(Line graph)**: ليكن $G(V, E)$ بياناً له مجموعة الأضلاع $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_q\}$. لنضع مكان كل ضلع e_i $(1 \leq i \leq q)$، رأس v_i،

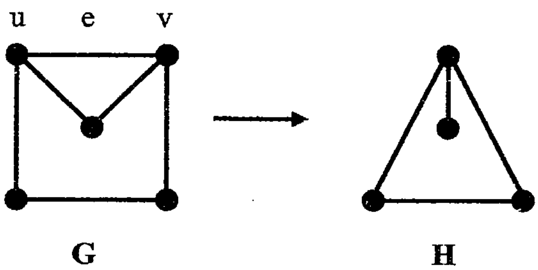
عندئذ نحصل على مجموعة الرؤوس $\{v_1, v_2, \ldots, v_q\}$ والتي هي رؤوس لبيان جديد H يسمى منقول البيان G ويكون الرأسان v_i و v_j متجاورين إذا وفقط إذا كان الضلعان e_i و e_j متجاورين في G. نكتب $H = L(G)$ عندما يكون البيان H منقولاً للبيان G. لاحظ الشكل (1-18).

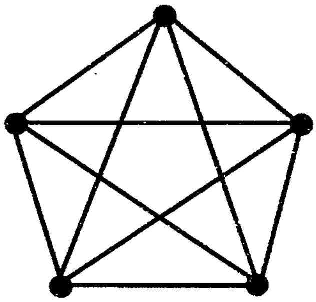


الشكل (1-18)

ملاحظة (1-4): إذا كان $G_1 \cong G_2$، عندئذ $L(G_1) \cong L(G_2)$ لكن العكس ليس صحيحاً بصورة عامة وكمثال على ذلك $L(K_3) \cong L(K(1, 3))$ مع أن K_3 و $K(1, 3)$غير متماثلين.

10) تقليص البيانات (Contraction graphs): ليكن البيان $G(V, E)$ والرأسان $u, v \in V(G)$ بحيث إن $e = uv \in E(G)$. إن تقليص الضلع e هو عبارة عن حذفه ومطابقة الرأسين u و v ليشكلا رأساً واحداً يجاور جميع الرؤوس التي كانت تجاور أياً من الرأسين u و v، ونحذف الأضلاع المضاعفة في حالة الرؤوس التي كانت تجاور الرأسين معا، ونقول عندئذ إن البيان G تقلص إلى البيان H أو البيان H مقلص (contractible) من البيانG. يمكن لبيان أن يتقلص بعدة مراحل إلى بيان آخر. لاحظ الشكل (1-19).



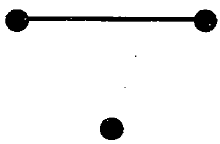


مقلص من بيان بيرسن

الشكل (1-19)

11) n–تعددية للبيان (n-multiplicit of graph): ليكن البيان G(V, E) من المرتبة p، عندئذ نقول إن للبيان G، n-تعددية (n ≥1) إذا كان البيان K_p يحتوي على n نسخة من الأضلاع المنفصلة مع مجموعة الرؤوس V(G) كبيان جزئـــي يماثل البيان G ولايحتوي على n +1 نسخة من G.

مثال (1-5): البيان في الشكل (1-20) له 3-تعددية لأن K_3 يحتوي على ثلاث نسخ منفصلة الأضلاع منه.



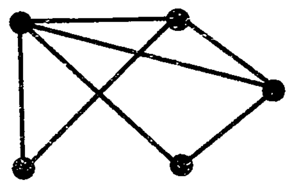
الشكل (1-20)

(5-1) متتالية الدرجة (Degree Sequences).

ليكن البيان $G(V, E)$ وقياسه $|E| = q$ ورتبته $|V| = p$، وليكن $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$، حيث $\rho(v_i) = d_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$، عندئذ نسمي المتتالية $d_1, d_2, \ldots, d_p$ متتالية الدرجة للبيان G.

للبيان G أكثر من متتالية درجة لها نفس العناصر ولكن بترتيب مختلف تبعا لترقيم رؤوس البيان وفي جميع الأحوال نرمز لمتتالية درجة البيان بالشكل $S : d_1, d_2, \ldots, d_p$ حيث $d_i \geq d_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$.

مثال (1-6): لتكن المتتالية $S : 4, 3, 3, 2, 2$، عندئذ البيان الموافق لهذه المتتالية يظهر في الشكل (1-21) .



الشكل -21)

السؤال الذي يجب طرحه الآن, هل كل متتالية درجة تمثل بياناً يمكن رسمه والجواب يكون بالطبع كلا وكمثال على ذلك، المتتالية $S : 3, 3, 3, 1$ لايمكن رسمها.

إذا كانت المتتالية $S : d_1, d_2, \ldots, d_p$ متتالية درجة ووجد بيان يمثلها، عندئذ نقول عنها متتالية قابلة للرسم (graphical). هناك بعض الشروط الواجب تحققها في المتتالية $S : d_1, d_2, \ldots, d_p$ حتى تكون متتالية درجة قابلة للرسم وهذه الشروط:

1) $0 \le d_i \le p-1$.

2) $\sum_{i=1}^{p} d_i$ يكون عدداً زوجياً.

الشروط السابقة لازمة وغير كافية ويؤكد ذلك المتتالية السابقة الذكر حيث إنها تحقق الشرطين وغير قابلة للرسم.

الشرط اللازم والكافي لكي تكون متتالية درجة قابلة للرسم، تجيب عنه المبرهنة التالية لـــ هافل وهكيم والتي نقبلها بدون برهان.

مبرهنة (2-1) (Havel-Hakimi,1955): المتتالية غير السالبة $S: d_1, d_2,\ldots, d_p$ حيث $d_1 \ge d_2 \ge \ldots \ge d_p$ و $d_1 \ge 1$ ، $p \ge 2$، تكون قابلة للرسم إذا وفقط إذا كانت المتتالية $S: d_2 -1, d_3 -1, \ldots, d_{d_1+1} -1, d_{d_1+2}, \ldots, d_p$ قابلة للرسم.

سنعرض الآن الخوارزمية التي تختبر قابلية متتالية للرسم.

خوارزمية (1-1): اختبار قابلية متتالية للرسم.

المعطيات : المتتالية $S: d_1, d_2, \ldots, d_p$ من الأعداد الصحيحة غير السالبة.

المخرجات : تحديد فيما إذا كانت S قابلة للرسم أم غير قابلة للرسم.

<u>الخطوات:</u>

1) إذا كان $d_i > p-1$ لأجل $(i = 1, 2, \ldots, p)$، عندئذ تكون المتتالية S غير قابلة للرسم وإلا انتقل إلى الخطوة التالية.

2) إذا كانت جميع عناصر S أصفاراً، عندئذ تكون قابلة للرسم وإلا انتقل إلى الخطوة التالية.

3) إذا كانت S تحتوي على عناصر سالبة، عندئذ تكون غير قابلة للرسم وإلا انتقل إلى الخطوة التالية.

4) رتب عناصر S (إذا كان ذلك ضروريا) بشكل متناقص.

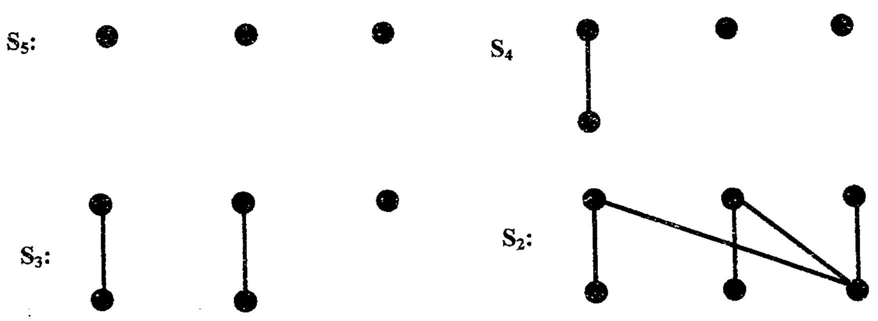
5) أحذف أول عنصر d_1 من المتتالية وانقص 1 من d_1 عنصر بعد العنصر المحذوف. أذهب إلى الخطوة 2.

مثال (7-1): لتكن المتتالية $S : 5, 4, 3, 3, 2, 2, 1$، ادرس قابليـة S للرسـم اعتماداً على الخوارزمية.

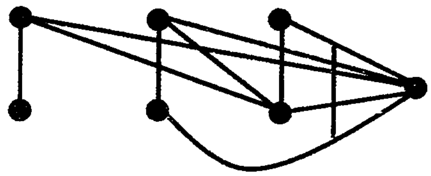
نلاحظ أن الخطوات من 2 إلى 5 تتكرر بشكل حلقة وفي النهاية نحصـل علـى الشكل:

$S_1 : 5, 4, 3, 3, 2, 2, 1$
$S_2' : 3, 2, 2, 1, 1, 1$
$S_3' : 1, 1, 0, 1, 1$
$S_3 : 1, 1, 1, 1, 0$
$S_4' : 0, 1, 1, 0$
$S_4 : 1, 1, 0, 0$
$S_5' : 0, 0, 0$

ينتج أن المتتالية S قابلة للرسم بالشكل التالي:



S₁:



الشكل (1-22)

هناك اختبار لقابلية متتالية للرسم يعود إلى (يردس_كالي) تتضمنه النظرية التالية:

مبرهنة (1-3) (Erdös – Gallai, 1960): لتكن المتتالية $S : d_1, d_2, \ldots, d_p$ حيث $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_p \geq 0$، عندئذ تكون قابلة للرسم إذا وفقط إذا كان

1) $\sum_{i=1}^{p} d_i$ عدداً زوجياً.

2) لأجل كل عدد صحيح k $(1 \leq k \leq p-1)$، يكون

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{p} \min\{k, d_i\}$$

مثال (8): لتكن المتتالية $S : 5, 4, 3, 3, 2, 2, 1$

الحل: نلاحظ أن $\sum_{i=1}^{7} d_i = 20$ وبالتالي الشرط الأول محقق.

لنتحقق من صحة المتراجحه في الشرط الثاني:

1. $k = 1 \Rightarrow d_1 = 5 \leq 1(0) + \sum_{i=2}^{7} \min\{1, d_i\} = 0 + 6 = 6$,

2. $k = 2 \Rightarrow d_1 + d_2 = 9 \leq 2(1) + \sum_{i=3}^{7} \min\{2, d_i\} = 2 + 10 = 12$,

3. $k = 3 \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} d_i = 12 \leq 3(2) + \sum_{i=4}^{7} \min\{3, d_i\} = 6 + 8 = 14$,

4. $k = 4 \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} d_i = 15 \le 4(3) + \sum_{i=5}^{7} \min\{4, d_i\} = 12 + 5 = 17$,

5. $k = 5 \Rightarrow \sum_{i=1}^{5} d_i = 17 \le 5(4) + \sum_{i=6}^{7} \min\{5, d_i\} = 20 + 3 = 23$,

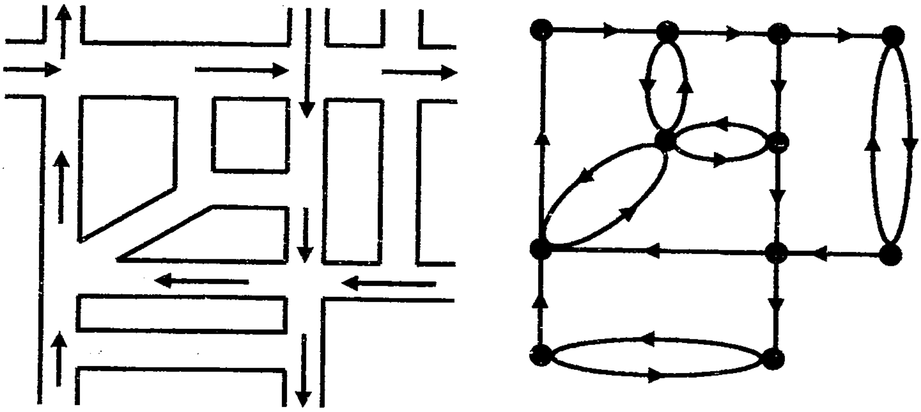
6. $k = 6 \Rightarrow \sum_{i=1}^{6} d_i = 19 \le 6(5) + \sum_{i=7}^{7} \min\{6, d_i\} = 30 + 1 = 31$.

نلاحظ أن الشرط الثاني محقق وبالتالي المتتالية قابلة للرسم.

(1- 6) البيان الموجه (Directed Graph).

كان تعاملنا في الفقرات السابقة مع البيان غير الموجه (undigraph) والتي اعتمدنا على تسميته بيان (Graph)، بينما البيان الموجه (Digraph) والذي سيكون موضوع دراستنا في هذه الفقرة هو بيان موجه الأضلاع، إي كل ضلع موجه من رأس إلى آخر مع إمكانية وجود أكثر من ضلع بين رأسين وفي اتجاهين مختلفين. نسمي كل ضلع بضلع موجه (Directed edge) أو قوس (Arc) ويمكن أن يوجد ضلع موجه بين الرأس ونفسه وعندئذ نسميه عروة موجهه (Directed loop). نرمز للبيان الموجه D(V, A) حيث V(D) مجموعة رؤوس البيان، A(D) مجموعة أضلاعه، |V| = p مرتبة البيان و |A| = q قياس البيان. يمكن أن نكتب D(p, q) للتعبير عن البيان D(V, A).

مثال (9): الشكل (1-23) يحتوي (A) مخطط مدينة صغيرة و (B) البيان الموجه الموافق لهذا المخطط.



الشكل (1-23)

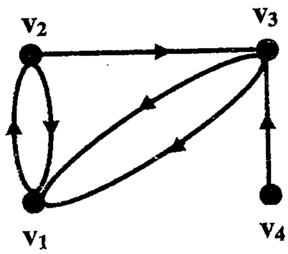
إذا كان $e(u, v)$ قوساً في البيان $D(V, A)$، عندئذ نقول إن e تصل الرأس u إلى الرأس v، حيث إن الرأسين u و v يقعان على القوس e الذي بدايته الرأس u ونهايته الرأس v وهذا يعني أن الرأس u مجاور إلى الرأس v والرأس v مجاور من الرأس u (ليس مجاور إلى الرأس u). يكون الرأسان u و v غير متجاورين إذا كان لايوجد بينهما ضلع موجه من u إلى v أو بالعكس. نعرف الدرجة الخارجية للرأس v (outdegree) بأنها عدد الأضلاع الموجهة الخارجة من الرأس v بالاضافة إلى عدد العروات الواقعة عليه ونرمز لها $od(v)$ أو $\rho^+(v)$. نعرف الدرجة الداخلية للرأس v (indegree) بأنها عدد الأضلاع الموجهة الداخلة إلى الرأس v بالاضافة إلى عدد العروات الواقعة عليه ونرمز لها $id(v)$ أو $\rho^-(v)$. درجة الرأس v في البيان الموجه $D(V, A)$ هي مجموع الدرجتين الداخلية والخارجية ونرمز لها $deg(v)$ أو $\rho(v)$، إي أن

$$\rho(v) = \rho^+(v) + \rho^-(v) \quad \text{أو} \quad deg(v) = od(v) + id(v)$$

مثال (1-10): ليكن البيان الموضح في الشكل (1-24)، عندئذ نجد

$$od(v_1) = 1 \;\; \& \;\; id(v_1) = 3 \;\; \& \; deg(v_1) = 4,$$

$od(v_2) = 2$ & $id(v_2) = 1$ & $deg(v_2) = 3$,
$od(v_3) = 2$ & $id(v_3) = 2$ & $deg(v_3) = 4$,
$od(v_4) = 1$ & $id(v_4) = 0$ & $deg(v_4) = 1$.



الشكل (1-24)

مبرهنة (1-2): ليكن $D(V, A)$ بيان موجه من المرتبة p والقياس q مع مجموعة الرؤوس $V(D) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$، عندئذ يكون

$$\sum_{i=1}^{p} \overset{+}{\rho}(v_i) = \sum_{i=1}^{p} \overset{-}{\rho}(v_i) = q.$$

البرهان: بطريقة مشابهة لبرهان المبرهنة (1-1) مع ملاحظة أن كل ضلع يشارك بدرجة خارجية ودرجة داخلية.□

ليكن البيانان $D_1(V, A)$ و $D_2(V, A)$، عندئذ نقول عنهما إنهما متماثلان إذا كان بينهما تقابل Φ واحد إلى واحد من $V(D_1)$ إلى $V(D_2)$ بحيث إنه لأجل أي رأسين u و v من $V(D_1)$ يتحقق الشرط التالي:

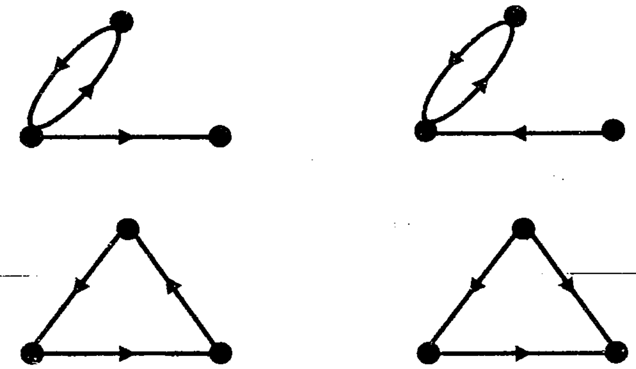
$$uv \in A(D_1) \Rightarrow \Phi(u)\Phi(v) \in A(D_2).$$

يكون البيانان $D_1(V, A)$ و $D_2(V, A)$ متطابقين إذا كان $V(D_1) = V(D_2)$ و $A(D_1) = A(D_2)$.

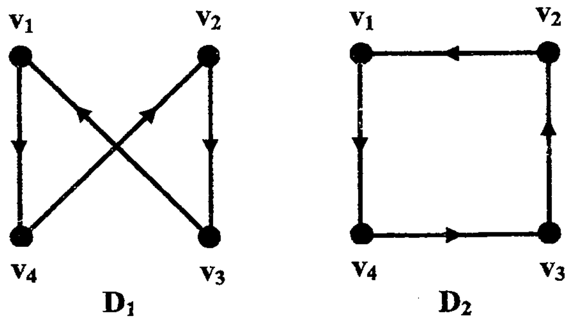
البيان الموجه البسيط هو بيان موجه خالٍ من العروات ولايحوي ضلعين مــوجهين من رأس إلى آخر بنفس الاتجاه.

ملاحظة (1-6): كل بيان موجه سيرد لاحقاً هو بيان بسيط مالم نذكر خلافاً لذلك.

مثال (1-11): لاحظ الشكل (1-25) يحتوي على بيانات غير متماثلة وبالتالي غير متطابقة وكذلك يحتوي على بيانات متماثلة وغير متطابقة.



بيانات غير متماثلة

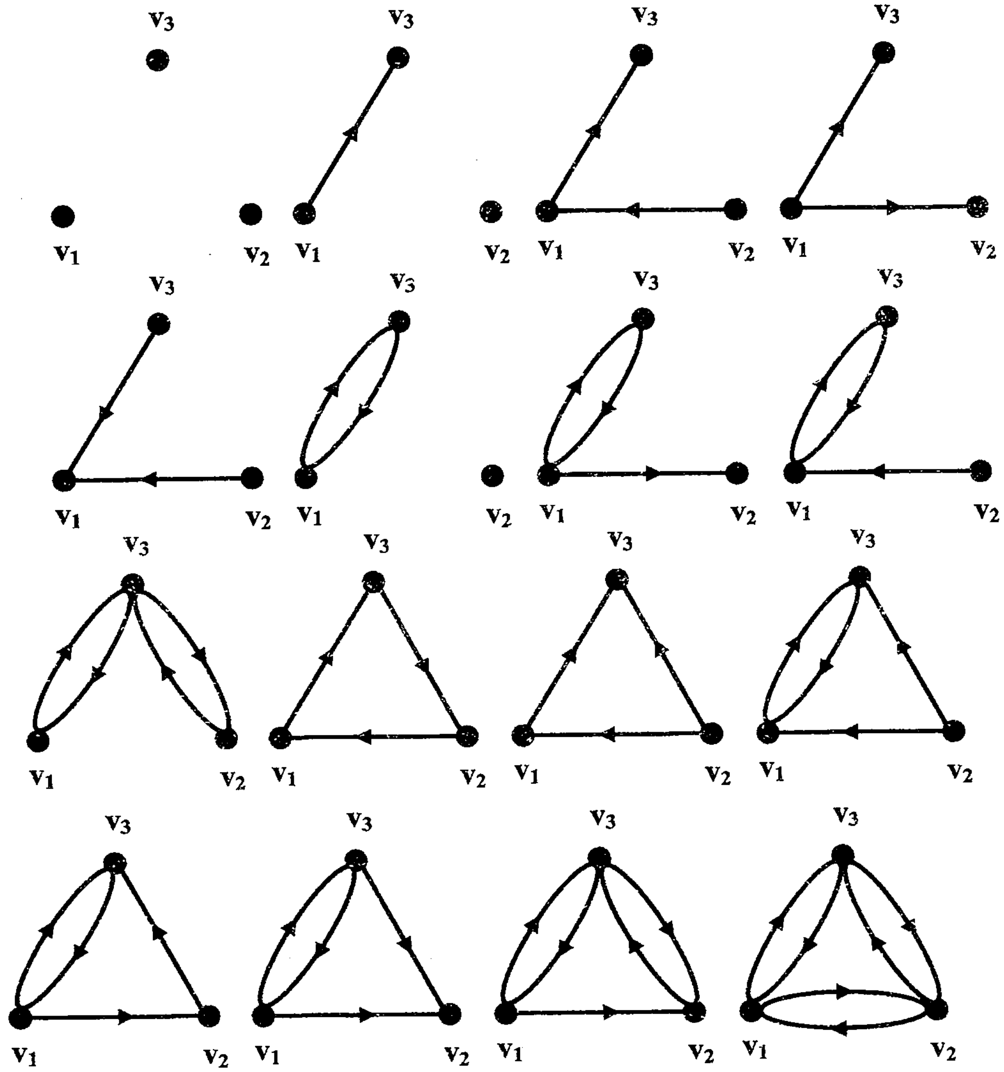


بيانان متماثلان وغير متطابقين

الشكل (1-25)

ملاحظة (1-7): كل بيانين متطابقين يكونان متماثلين لكن العكس غير صحيح بشكل عام.

مثال (1-12): البيانات الموجهة البسيطة غير المتماثلة بثلاثة رؤوس موضحة في الشكل (1-26).

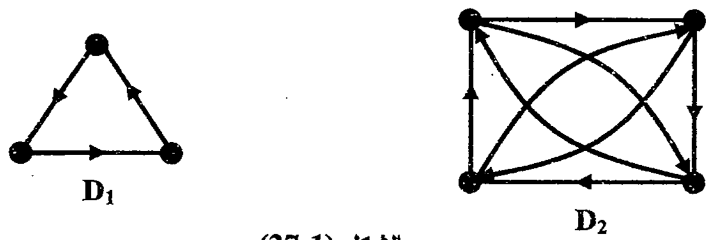


الشكل (1-26)

ليكن $D(V, A)$ بياناً موجهاً، نقول عن D إنه متناظر (Symmetric) إذا كان $(u, v)\in A(D)$ عندئذ يكون $(v, u)\in A(D)$.

يكون البيان $D(V, A)$ لاتناظري (Asymmetric) إذا كان يوجد رأس على الأقل $(u_0, v_0)\in A(D)$ بحيث يكون $(v_0, u_0)\notin A(D)$. يكون $D(V, A)$ دوري (Tournament) إذا كان يصل بين كل رأسين، قوس واحد فقط.

البيان الموجه $D(p, q)$ من القياس $q = p(p - 1)$ يسمى بياناً موجهاً متناظراً تاماً (Complete Symmetric Digraph)، إذا كان لأجل كل رأس $v\in V(D)$ يكون $od(v) = id(v) = p - 1$, ونرمز له K_p^*. البيان الموجه $D(V, A)$ يكون منتظم من الدرجة r (r-regular digraph)، إذا كان لأجل كل رأس $v\in V(D)$ يكون $od(v) = id(v) = r$ ونرمز لذلك D_r. لاحظ الشكل (27-1).



الشكل (27-1)

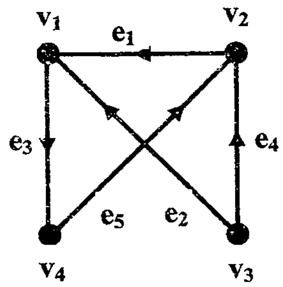
ليكن $D(V, A)$ بياناً موجهاً مع مجموعة الرؤوس $V(D) = \{v_1, \ldots, v_p\}$ ومجموعة الأقواس $A(D) = \{e_1, e_2, \ldots, e_q\}$.

a) مصفوفة التجاور (Adjacency Matrix): هي مصفوفة مربعة من القياس $p\times p$ ومعرفة بالشكل $A_1(D) = [a_{ij}]$، حيث $a_{ij} = 1$ إذا كان $v_iv_j\in A(D)$ و $a_{ij} = 0$ إذا كان $v_iv_j\notin E(D)$. نلاحظ أن المصفوفة $A_1(D)$ ليست بالضرورة متناظرة.

b) مصفوفة التقاطع (Incidence Matrix): هي مصفوفة مـن القيـاس p×q ومعرفة بالشكل $B_1(D) = [b_{ij}]$، حيث $b_{ij} = 1$ إذا كان الـرأس v_i رأس بدايـة للقوس e_j و $b_{ij} = -1$ إذا كان الرأس v_i رأس نهاية للقوس e_j، و $b_{ij} = 0$ عنـدما لايقع القوس e_j على الرأس v_i (v_i ليس رأس بداية ولا رأس نهاية للقوس e_j).

c) مصفوفة الوصول (Reachability Matrix): هي مصفوفة من القياس p×p ومعرفة بالشكل $R_1(D) = [r_{ij}]$، حيث $r_{ij} = 1$ إذا كان في D مسار v_i-v_j من الرأس v_i إلى الرأس v_j، و $r_{ij} = 0$ إذا كان لايمكن الوصول من v_i إلى v_j.
نلاحظ أن جميع عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة R(D) تساوي الواحد.

مثـال (13-1): أوجد مصفوفات التجاور، الوقوع، الوصول للبيـان فـي الشـكل (28-1).



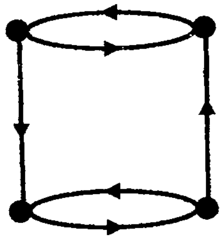
الشكل (28-1)

$$A_1(D) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_1(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_1(G) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ليكن البيان $D(V, A)$ مع مجموعة الرؤوس $V(D) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$.
لدراسة متتالية الدرجة في البيان الموجه يجب أن نعبر عن كل رأس بدرجتيه الخارجية والداخلية معاً. لتكن متتالية الثنائيات $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \ldots, (s_p, t_p)$، حيث $s_i, t_i \geq 0$ لأجل $1 \leq i \leq p$. نسمي المتتالية السابقة، متتالية درجة للبيان الموجه $D(V, A)$ إذا كانت رؤوسه تحقق $s_i = od(v_i)$ و $t_i = id(v_i)$.

مثال (1-14): المتتالية $(1, 2), (2, 1), (1, 2), (2, 1)$ يقابلها البيان في الشكل (1-29).



الشكل (1-29)

نقول عن المتتالية $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \ldots, (s_p, t_p)$ إنها قابلة للرسم (digraphical)، إذا كانت تمثل درجات رؤوس بيان موجه.
ليس بالضرورة كل متتالية ثنائيات عناصرها أعداد صحيحة موجبة تكون قابلة للرسم، كمثال على ذلك المتتالية $(0, 0), (1, 1)$.
الشرط اللازم والكافي حتى تكون متتالية ثنائيات قابلة للرسم تنص عليه نظرية (فولكيرسن _ رايزر).

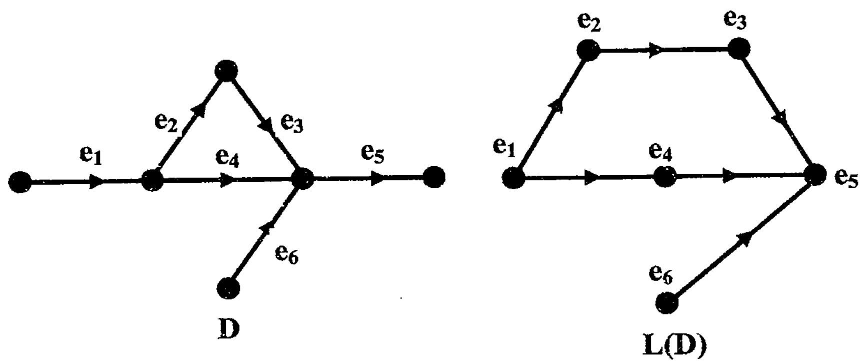
مبرهنة (1-3) (Fulkerson-Ryser,1963): المتتالية $(s_1, t_1),(s_2, t_2),\ldots,(s_p, t_p)$ من ثنائيات الأعداد الصحيحة الموجبة حيث $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_p$، تكون قابلة للرسم، إذا وفقط إذا كان

a) $s_i \le p-1$ و $t_i \le p-1$ لأجل $1 \le i \le p$،

b) $\sum_{i=1}^{p} s_i = \sum_{i=1}^{p} t_i$،

c) $\sum_{i=1}^{n} s_i \le \sum_{i=1}^{n} \min\{n-1, t_i\} + \sum_{i=n+1}^{p} \min\{n, t_i\}$ لأجل $1 \le n < p$.

ليكن البيان الموجه $D(V, A)$. نعرف منقول البيان D بأنه البيان الذي له مجموعة الرؤوس $\{e_1, e_2, \ldots, e_q\}$ التي هي أقواس للبيان D ويكون $e_ie_j \in A(L(D))$ إذا كان $e_i = uv \in A(D)$ و $e_j = vw \in A(D)$. لاحظ في الشكل (1-30)، البيـــان D ومنقولة $L(D)$.



الشكل -30)

تمــــــــــارين:

1. لتكن $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_8\}$ مجموعة رؤوس البيان البسيط G. إذا علمت أن $v_iv_j \in E(G)$ إذا وفقط إذا كان i و j يقسم أحدهما الأخر. ارسم البيان G.

2. ليكن البيان البسيط $G(p, q)$ حيث $2 \leq p$، أثبت أن G يحتوي على رأسين بنفس الدرجة.

3. ليكن البيان $G(p, q)$. أثبت أن $\delta(G) \leq 2q/p \leq \Delta(G)$.

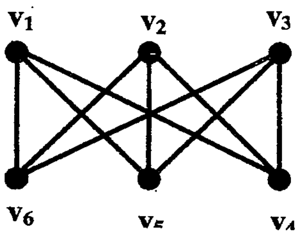
4. أوجد البيانات البسيطة (4, 3)-الغير متطابقة.

5. أوجد البيانات الغير متماثلة بأربعة رؤوس.

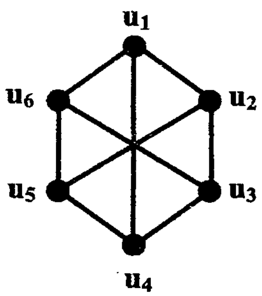
6. ليكن البيانان G و H. برهن أن $G \cong H$ إذا وفقط إذا كان $\overline{G} \cong \overline{H}$.

7. أثبت صحة أو خطأ التالي: ليكن $V = \{v_1, \ldots, v_p\}$، عندئذ عدد (p, q)-بيان غير متطابق لها مجموعة الرؤوس V يساوي عدد (p, p(p-1)/2 –q)-بيان غير متطابق لها مجموعة الرؤوس V.

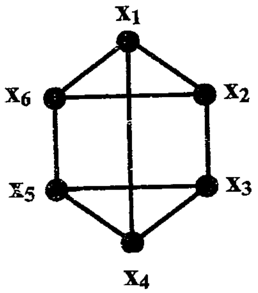
8. بيّن تماثل أو عدم تماثل أزواج البيانات التالية:



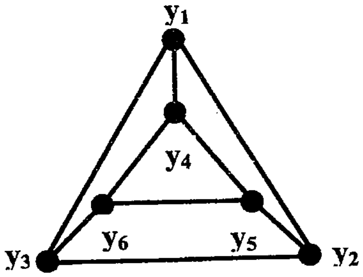
G1



G2



G3



G4

9. برهن أن البيان G يكون ثنائي التجزئة تاماً إذا وفقط إذا كان للبيان G مصفوفة التجاور من الشكل:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & | & A_{12} \\ --- & | & --- \\ A_{21} & | & 0 \end{bmatrix}$$

حيث A_{12} و A_{21} مصفوفات جزئية من المصفوفة A، أيضاً A_{12} تكون منقول A_{21}.

10. برهن أن البيان G يكون غير مترابط إذا وفقط إذا كان للبيان G مصفوفة التجاور من الشكل:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & | & 0 \\ --- & | & --- \\ 0 & | & A_{22} \end{bmatrix}$$

حيث A_{11} و A_{22} مصفوفات جزئية من المصفوفة A.

11. ارسم البيان W_4 ومتممه.

12. ليكن H_1 و H_2 بيانين جزئيين من البيان G، عندئذ أثبت أن

a. $\overline{G_1 \cup G_2} = \overline{G_1} \cap \overline{G_2}$.

.$\overline{G_1 \cap G_2} = \overline{G_1} \cup \overline{G_2}$ **.b**

13. أوجد كل البيانات المتممة–الذاتية والتي لها مرتبة أقل أو تساوي 5.

14. أثبت أنه إذا كان البيان $G(p, q)$ متمم–ذاتي، فإن $p \equiv 0, 1 (\text{mod } 4)$.

15. برهن أن أي بيان من المرتبة 6 يحتوي أحد البيانين K_3 أو $\overline{K_3}$ كبيان جزئي.

16. ليكن البيان $G(p, q)$، جد عدد رؤوس وعدد أضلاع $L(G)$.

17. أثبت أن $L(K_p)$ يكون بيان منتظم من الدرجة $(2p - 4)$ وأن $L(K(m, n))$ بيان منتظم من الدرجة $(m + n - 2)$.

18. أوجد $G \times L(G)$ حيث البيان G ومنقولة $L(G)$ المعطيان في الشكل (1-18)، هل $G \times L(G) \cong L(G) \times G$ ؟.

19. أوجد $P_5[C_6]$ و $C_5[P_6]$ وهل هما متماثلان ؟.

20. ليكن G بيان ما عندئذٍ برهن أن

.$K_2[G] \cong G + G$ **.a**

.$\overline{K_2}[G] \cong 2G$ **.b**

21. ليكن البيانان $G_1(p_1, q_1)$ و $G_2(p_2, q_2)$. إذا كان $v_i \in V(G_1)$ حيث $\rho(v_i) = \rho_i$، و $u_j \in V(G_2)$، $\rho(v_j) = \rho_j$، والمطلوب إيجاد

a. $\rho(x)$ في البيان $G_1 + G_2$ (حيث $x \in V(G_1)$ or $x \in V(G_2)$) وأوجد عدد رؤوسه وعدد أضلاعه.

b. $\rho(v_i, u_j)$ في البيان $G_1 \times G_2$ وأوجد عدد رؤوسه وعدد أضلاعه.

c. $\rho(v_i, u_j)$ في البيان $G_1 \otimes G_2$ وأوجد عدد رؤوسه وعدد أضلاعه.

d. $\rho(v_i, u_j)$ في البيان $G_1[G_2]$ وأوجد عدد رؤوسه وعدد أضلاعه.

22. أثبت أن للبيان G يكون 2-تعددية و $2q(G) = q(K_p)$ إذا وفقط إذا كان G متمماً – ذاتياً.

23. ليكن G بياناً متمماً–ذاتياً غير تافه، عندئذ يكون $2 \le \text{diam}(G) \le 3$ و $\text{rad}(G) = 2$.

24. أوجد n–تعددية للبيانات التالية $2K_2, K_2 \cup K_3, K(1, n)$.

25. أثبت أن المتتالية $d_1, d_2, \ldots, d_p$ تكون قابلة للرسم إذا وفقط إذا كانت المتتالية $p - d_1 - 1, p - d_2 - 1, \ldots, p - d_p - 1$ قابلة للرسم.

26. ناقش قابلية المتتاليات التالية للرسم اعتماداً على نظرية (يردس _ كالي) وأرسم القابل منها للرسم بحسب خوارزمية اختبار قابلية متتالية للرسم.

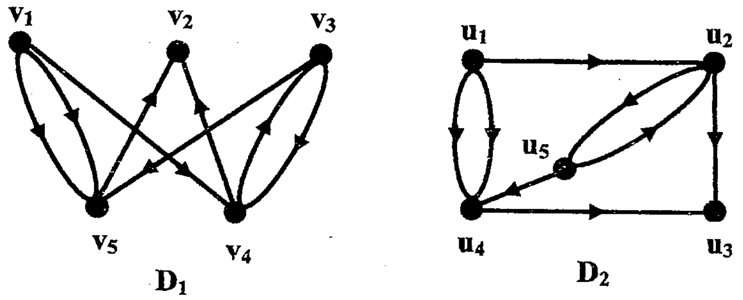
a. S : 7, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 0, 0.

b. S : 5, 5, 5, 5, 2, 2 ,2.

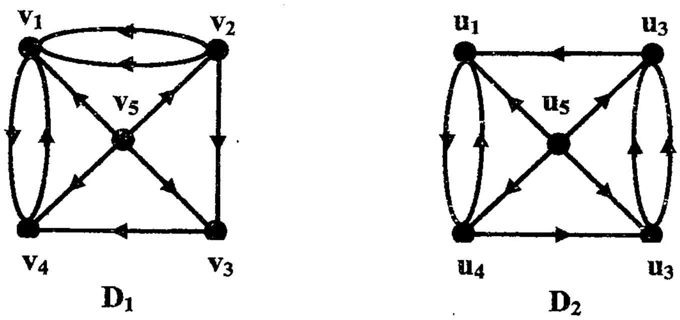
c. S : 7, 6, 5, 5, 4, 3, 2, 2, 2.

27. أوجد البيانات الموجهة البسيطة غير المتماثلة بأربعة رؤوس وأربعة أقواس.

28. بيّن تماثل أو عدم تماثل البيانين في كل من المجموعات (a) و (b).



(a)



(b)

29. أوجد منقول البيانين في التمرين (28)(a)، ماذا تستنتج.

30. ناقش قابلية المتتاليات التالية للرسم اعتماداً على نظرية (فولكيرسن_رايزر) وأرسم القابل منها للرسم. هل يمكن تطبيق خوارزمية اختبار قابلية متتالية للرسم للبيان غير الموجه, للمتتاليات القابلة للرسم هنا ؟.

a. S : (2, 1), (1, 3), (3, 0), (1, 3).

b. S : (1, 1), (2, 3), (2, 1), (1, 3).

c. S : (1, 3), (2, 4), (3, 0), (2, 2), (2, 1).

الفصـــل الـــثـــانـــي

المسارات والترابط

Paths and Connectivity

في كل يوم نتعرض لمشكلة الطرق وطول أقصر المسافات التي نسلكها للوصول إلى مكان ما. فالطالب الذي يذهب إلى الجامعة يمر بمحطة أو عدة محطات وبين كل محطة وأخرى يوجد خط مستقيم أو منحني وبالتأكيد لا يقطع نفسه. إذا رمزنا لهذه المحطات بعقد وسميناها رؤوس (vertices) وللخطوط بينها بأضلاع (edges)، فعندئذٍ يمكن أن نعبر عن هذه الرحلة اليومية ببيان يطلق عليه مسار (Path) وتكون مشكلة الدراسة في هذا الموضوع هي البحث عن أقصر المسارات المتاحة لهذه الرحلة.

(1-2) المسارات والحلقات (Paths and Cycles).

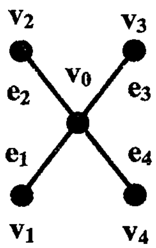
ليكن البيان $G(p, q)$ و u و v رأسين من البيان G (ليس بالضرورة متمايزان). نسمي $W = u\text{-}v$ مسلك (walk) من الرأس u إلى الرأس v، إذا كان W متتالية متناوبة من الرؤوس والأضلاع بالشكل التالي:

$$u = v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k = v$$

بحيث إن $e_i = v_iv_{i+1}$ لأجل $(i = 0, 1, \ldots, k\text{-}1)$، أي أن كل ضلع في المسلك W يبدأ برأس سابق وينتهي برأس لاحق. نسمي الرأس $u = v_0$ رأس بداية المسلك والرأس $v = v_k$ رأس نهاية المسلك. طول المسلك يكون k والذي هو عدد

الأضلاع المتكررة في المسلك. إذا كان $k = 0$ فإن المسلك يكون مسلكاً تافهاً ويتألف من رأس واحد. بشكل عام نرمز u-v, للمسلك الذي بدايته الرأس u ونهايته الرأس v. من بديهية تعريف المسلك يجب أن يكون كل ضلعين متتاليين فيه متجاورين وهذا لا يعني بالضرورة كل متتالية من الأضلاع تشكل مسلكاً.

مثال (2-1): في الشكل (2-1):



الشكل (2-1)

المتتالية e_1, e_2, e_3, e_4 لا تشكل مسلكاً مع العلم كل ضلعين فيها متجاورين، لأنه إذا كتبنا المتتالية السابقة كتتابع أضلاع ورؤوس فنجد v_1, e_1, v_0, e_2, v_2 ولا يمكن كتابة الضلع e_3 لأنه لا يقع على الرأس v_2. إذا أخذنا المتتالية $e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, e_4$ فإنها تشكل مسلكاً لأن

$$u = v_1, e_1, v_0, e_2, v_2, e_2, v_0, e_3, v_3, e_3, v_0, e_4, v_4 = v$$

والمهم ذكره إنه من الممكن تكرار الأضلاع والرؤوس في المسلك.

ليكن المسلكان $u = u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, \ldots, e_{n-1}, u_n = v$

$$u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_{m-1}, v_m = v$$

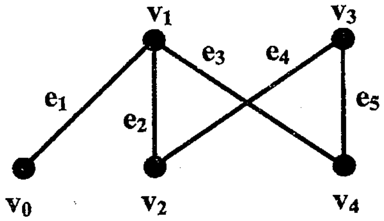
عندئذٍ نقول إنهما متساويان إذا وفقط إذا كان $n = m$ و $u_i = v_i$ لأجل $(i = 0, 1, \ldots, n)$، وبخلاف ذلك يكونان غير متساويين. يمكن لمسلكين مختلفين

أن يشكلا نفس البيان الجزئي في البيان G، كما أن المسلك W_1 يكون محتوى في المسلك W_2 إذا كانت متتالية W_1 متتالية جزئية من متتالية W_2.

مثال (2-2): ليكن البيان الموضح في الشكل (2-2) ولنشكل المسلكين W_1 و W_2 كما يلي:

$$W_1 = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_4, v_3, e_5, v_4, e_3, v_1)$$

$$W_2 = (v_0, e_1, v_1, e_3, v_4, e_5, v_3, e_4, v_2, e_2, v_1)$$



الشكل (2-2)

نلاحظ أن المسلكين مختلفان مع العلم أنهما يشكلان نفس البيان وطول كل منهما يساوي 5.

نسمي المسلك u-v رحلة (trial) إذا كان لا يحتوي على أضلاع مكررة (من الممكن تكرار الرؤوس). ونطلق عليه مسار (path) إذا كان لا يحتوي على رؤوس مكررة. طول المسار هو عدد الأضلاع الموجودة فيه ونرمز له P_n حيث n عدد رؤوس المسار وطوله يساوي n-1. نلاحظ أن كل مسار يكون رحلة وكل رحلة تكون مسلكاً ولكن العكس غير صحيح.

مثال (3-2): في الشكل (2-2) نلاحظ أن

$W_1 = v_0\text{-}v_4$ مسلك وليس رحلة حيث $W_1 : v_0, v_1, v_2, v_1, v_4$

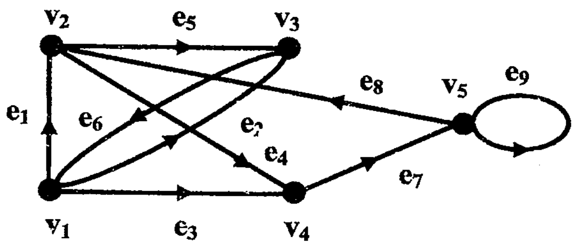
$W_2 = v_1\text{-}v_0$ رحلة وليس مساراً حيث $W_2 : v_1, v_2, v_3, v_4, v_1, v_0$

$W_3 = v_0\text{-}v_3$ مسار حيث $W_3 : v_0, v_1, v_4, v_3$

الرحلة u-v تكون مغلقة إذا كان $u = v$ وتكون مفتوحة عندما $u \neq v$. إذا كانت الرحلة u-v مغلقة نسميها دورة (circuit). الدورة u-v تسمى حلقة (cycle) عندما لا تحتوي على رؤوس مكررة (أي أن الحلقة هي مسار مغلق).

نرمز للحلقة C_n التي عدد رؤوسها n وعدد أضلاعها n. في الشكل (2-2) الحلقة $C_4 : v_1, v_2, v_3, v_4$ عدد رؤوسها 4 وطولها 4. إذا كان البيان G ليس شجرة فإن أصغر حلقة فيه تسمى خصر (girth) البيان.

ملاحظة (2-1): مفاهيم المسلك، الرحلة، المسار، الدورة والحلقة تنطبق على البيان الموجه بشرط أن تحقق المتتالية المتناوبة من الرؤوس والأضلاع الشرط التالي: كل ضلع يكون موجهاً من الرأس السابق إلى الرأس اللاحق، أي أنه إذا كانت $v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n$ متتالية في البيان الموجه D(V, A) فإن $e_i = v_{i-1}v_i$ يكون ضلعاً موجهاً من الرأس v_{i-1} إلى الرأس v_i.



الشكل (2-3)

في الشكل (2-3) نلاحظ أن

مسلك موجه	$W_1 : e_1, e_4, e_7, e_8, e_5, e_6, e_1$
رحلة موجهة	$W_2 : e_1, e_5, e_6, e_2$
مسار موجه	$W_3 : e_3, e_7, e_8, e_5$
دورة موجهة	$C : e_1, e_4, e_7, e_8, e_5, e_6$
حلقة موجهة	$C_3 : e_4, e_7, e_8$

مبرهنة (2-1): (Chartrand & Lesniak, 1986) كل u-v مسلك في البيان G (البيان الموجه D) يحوي u-v مسار.

البرهان: يترك البرهان كتمرين للطالب.□

هناك علاقة بين مصفوفة التجاور والمسارات في البيان تحددها النظرية التالية:

مبرهنة (2-2): لتكن A مصفوفة التجاور للبيان G(V, E) حيث $V(G) = \{v_1,\ldots, v_p\}$، عندئذٍ العنصر (i, j) في المصفوفة A^n لأجل $(n \geq 1)$ يساوي عدد المسالك المختلفة من الطول n بين الرأسين v_i و v_j.

البرهان: بالاستقراء على n.
إذا كان n = 1. عندئذٍ من أجل أي رأسين v_i و v_j متجاورين في البيان G يوجد ضلع بينهما وبالتالي يكون (i, j) =1 في A. لنفرض النظرية صحيحة من أجل n-1، أي أن $A^{n-1}=[a_{ij}^{(n-1)}]$ حيث $a_{ij}^{(n-1)}$ يكون عدد المسالك المختلفة بين الرأسين v_i و v_j من الطول n-1 في G. ليكن $A^n=[a_{ij}^{(n)}]$.
بما أن $A^n = A^{n-1}\times A$، ينتج لدينا

$$a_{ij}^{(n)}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}^{(n-1)}a_{kj} \qquad (1-2)$$

كل مسلك v_i-v_j من الطول n في البيان G يحتوي مسلكاً v_i-v_k من الطول n-1 وحيث $v_kv_j\in E(G)$، عندئذٍ المسلك v_i-v_k يُتبع بالضلع v_kv_j والرأس v_j. الآن، بفرض الاستقراء والعلاقة (2-1) ينتج المطلوب.□

نتيجة (1-2): ليكن $G(V, E)$ بياناً مع $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. لتكن A مصفوفة التجاور للبيان G و $A^n = [a_{ij}^{(n)}]$ قوة A من المرتبة n. عندئذٍ

1) $a_{ij}^{(2)}$ حيث $i \neq j$، هو عدد المسارات v_i-v_j من الطول 2.

2) $a_{ii}^{(2)} = \deg v_i$.

3) $\dfrac{\sum_{i=1}^{p} a_{ii}^{(3)}}{6}$ يساوي عدد المثلثات في G (عدد الحلقات C_3).

(2-2) المسافات (Distance):

ليكن $G(V, E)$ بياناً بسيطاً. نقول عن الرأسين u و v إنهما متصلان إذا كان u-v مساراً في البيان G.

يكون البيان G مترابطاً (connected) إذا كان كل رأسين فيه متصلين وفيما عدا ذلك يكون غير مترابط (disconnected). إذا كان البيان $G(V, E)$ مترابطاً فيمكننا أن نعرف عليه المفاهيم التالية:

المسافة (distance)، $d(u, v)$ بين الرأسين u و v بأنها أقصر مسار بينهما. إذا كان لا يوجد مسار بين الرأسين عندئذٍ تكون المسافة بينهما غير معرفة ونرمز لذلك $d(u, v) = \infty$ وهذا يكون في البيان غير المترابط.

سندرس مفهوم المسافة في البيان غير الموجه وفي البيان الموجه.

(1-2-2) المسافة في البيان غير الموجه (Distance in graph).

مفهوم المسافة على رؤوس البيان V(G) يُعرف دالة مسافة d تحقق الشروط التالية:

لتكن u, v, w رؤوساً كيفية من البيان G، عندئذٍ

a) $d(u, v) \geq 0$,
b) $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$,
c) $d(u, v) = d(v, u)$,
d) $d(u, w) + d(w, v) \geq d(u, v)$.

وبذلك نحصل على الفضاء المتري (W(G), d).

ليكن البيان المترابط G(V, E). نعرف الاختلاف المركزي (eccentricity) للرأس v بأنه أكبر مسافة له عن أي رأس آخر في G ونرمز له e(v)، أي أن

$$e(v) = \max_{u \in V(G)} d(v,u)$$

ونعرف نصف القطر (radius) للبيان G، rad(G)، بأنه أصغر اختلاف مركزي في G، أي أن

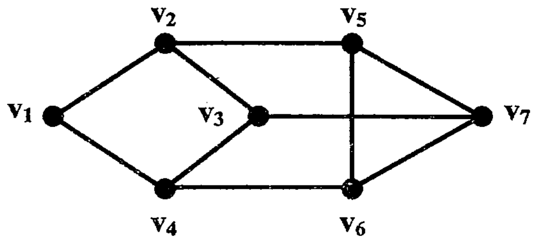
$$rad(G) = \min_{v \in V(G)} e(v)$$

أما قطر (diameter) البيان G، diam(G)، فإنه أكبر اختلاف مركزي للبيان G، أي أن

$$diam(G) = \max_{v \in V(G)} e(v)$$

الرأس v يكون رأس مركز (center) للبيان G إذا كان e(v) = rad(G). يمكن أن يحتوي البيان على أكثر من رأس مركزي وهذه الرؤوس تشكل مركزاً للبيـــان ونرمز لها Z(G).

مثال (2-4): ليكن البيان $G(V, E)$ الموضح في الشكل (2-4) والمطلوب حساب نصف القطر، القطر والمركز.



الشكل (2-4)

نجد أولاً المسافات بين الرؤوس ومن ثم الاختلافات المركزية للرؤوس والذي يوضحها العمود الأخير من الجدول التالي:

$d(v_i,v_j)$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	$e(v_i)$
v_1	0	1	2	1	2	2	3	3
v_2	1	0	1	2	1	2	2	2
v_3	2	1	0	1	2	2	1	2
v_4	1	2	1	0	2	1	2	2
v_5	2	1	2	2	0	1	1	2
v_6	2	2	2	1	1	0	1	2
v_7	3	2	1	2	1	1	0	3

الجدول (2-1)

نلاحظ أن $rad(G) = 2$، $diam(G) = 3$ و $Z(G) = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.

مبرهنة (2-3): لأجل أي بيان مترابط G، يكون

$$rad(G) \le diam(G) \le 2\, rad(G).$$

البرهان: الطرف الأول من المتراجحة ينتج بسهولة من تعريف القطر ونصف القطر. من أجل برهان الطرف الثاني، لنختار الرأسين $u, v \in V(G)$ بحيث يكون $d(u, v) = diam(G)$. ليكن الرأس $w \in Z(G)$. بما أن المسافة d تعرف دالة مسافة على رؤوس البيان، ينتج لدينا

$$diam(G) = d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \leq 2\, rad(G).$$

وهو المطلوب برهانه للطرف الثاني للمتراجحة.□

المتتالية غير المتناقصة من الأعداد الصحيحة الموجبة $S: a_1, a_2, \ldots, a_p$ تدعى متتالية الاختلاف المركزي إذا كان هناك بيان متصل $G(V, E)$ له الرؤوس المرقم $v_1, v_2, \ldots, v_p$ بحيث يكون $e(v_i) = a_i$ لأجل $i = 1, 2, \ldots, p$ هذه المتتالية تسمى متتالية الاختلاف المركزي للبيان G.

مثال (2-5): للبيان في الشكل (2-4) متتالية الاختلاف المركزي تكون $S: 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3$.

بما أن $a_p \leq p - 1$، $rad(G) = a_1$ و $diam(G) = a_p$، عندئذٍ من المبرهنة (2-3) نستنتج أن $a_p \leq \min\{p - 1, 2a_1\}$.

هناك خوارزمية تدعى خوارزمية ديجكسترا (Dijkstra) تعطينا أصغر مسافة بين رأس معطى v_0 وبقية رؤوس البيان ومن أجل ذلك نحتاج إلى تعريف البيان الموزون (weighted) هو بيان مرفق مع أضلاعه (رؤوسه) أو كليهما دالة وزن حقيقية تُعبر عن وزن (كلفة) الضلع أو الرأس.

خوارزمية ديجكسترا (1-2) (Dijkstra's Distance Algorithm):

المعطيات: $G(V, E)$ بيان موزون ومترابط من المرتبة p و v_0 رأس في G.

المخرجات: المسافة بين رأس معطى v_0 ورؤوس البيان.

<u>الخطوات:</u>

1- ليكن $i = 0$، $S_0 = \{v_0\}$، $L(v_0) = 0$ و $L(v) = \infty$ حيث $v \neq v_0$. إذا كان $p = 1$، عندئذٍ توقف وإلا أذهب إلى الخطوة 2.

2- لأجل كل رأس $v \in S'_i = N(S_i)$ (S'_i مجموعة الرؤوس المجاورة لرؤوس S_i)، ضع

$$L(v) = \min\{L(v), L(v_i) + w(v_i v)\}$$

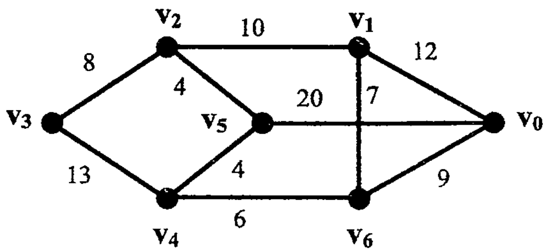
إذا حدث تغيير على قيمة $L(v)$، عندئذٍ نرقم v بالثنائية $(L(v), v_i)$.

3- أوجد $\min_{v \in S'_i}\{L(v)\}$ وليكن v_{i+1} رأس له أقل مسافة الوصول من v_0.

4- ليكن $S_{i+1} = S_i \cup \{v_{i+1}\}$.

5- ضع $i = i + 1$. إذا كان $i = p - 1$، عندئذٍ توقف، وإلا أذهب إلى الخطوة 2.

مثال (2-6): ليكن البيان الموضح في الشكل (2-5)، ولنوجد المسافات عن الرأس v_0 اعتماداً على الخوارزمية السابقة.



الشكل (2-5)

الحل:

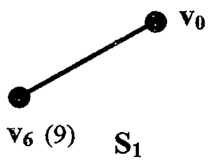
-1 $i = 0$، $S_0 = \{v_0\}$، $L(v_0) = 0$ و $L(v) = \infty$ لأجل $v \neq v_0$.

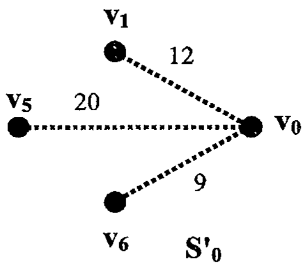
-2 $S'_0 = \{v_1, v_5, v_6\}$, $L(v_1) = 12$، $L(v_5) = 20$ و $L(v_6) = 9$

-3 أقل مسافة للرؤوس في S'_1 هي مسافة الرأس v_6،

-4 ليكن $S_1 = \{v_0, v_6\}$.

-5 $i = 1$. بما أن $i < 6$، أذهب إلى الخطوة الثانية.



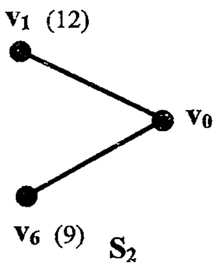


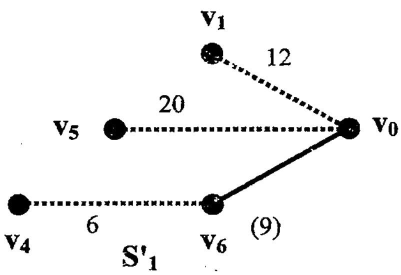
-2 $S'_1 = \{v_1, v_5, v_4\}$, $L(v_1) = 12$، $L(v_5) = 20$ و $L(v_4) = 15$,

-3 أقل مسافة للرؤوس في S'_1 هي مسافة الرأس v_1،

-4 ليكن $S_2 = \{v_0, v_1, v_6\}$.

-5 $i = 2$. بما أن $i < 6$، أذهب إلى الخطوة الثانية.



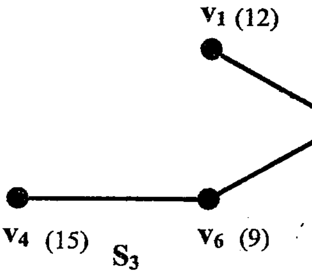


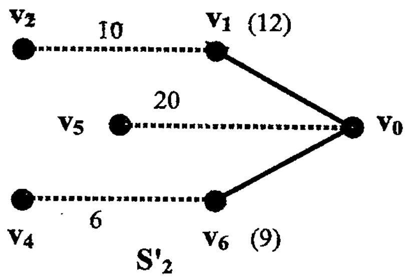
-2 $S'_2 = \{v_2, v_4, v_5\}$, $L(v_2) = 22$، $L(v_4) = 15$ و $L(v_5) = 20$,

-3 أقل مسافة للرؤوس في S'_2 هي مسافة الرأس v_4 عبر v_6.

-4 ليكن $\{v_0, v_1, v_4, v_6\} = S_3$.

-5 $i = 3$. بما أن $i < 6$، أذهب إلى الخطوة الثانية.



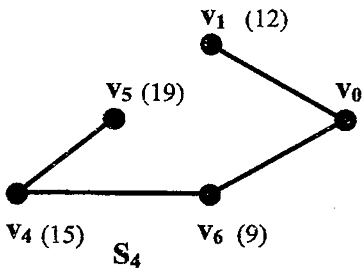


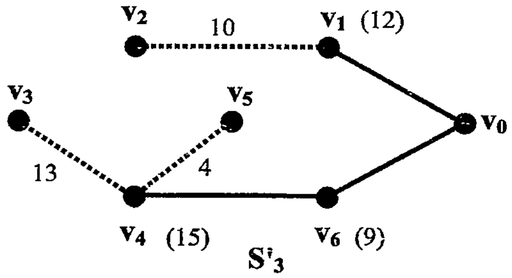
-2 $S'_3 = \{v_2, v_3, v_5\}$, $L(v_2) = 22$، $L(v_3) = 28$ و $L(v_5) = 19$,

-3 أقل مسافة للرؤوس في S'_3 هي مسافة الرأس v_5،

-4 ليكن $\{v_0, v_1, v_4, v_5, v_6\} = S_4$.

-5 $i = 4$. بما أن $i < 6$، أذهب إلى الخطوة الثانية.



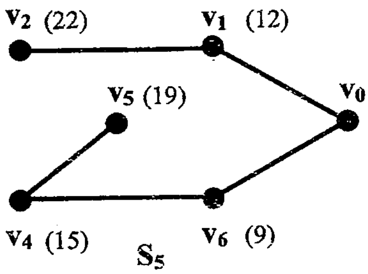


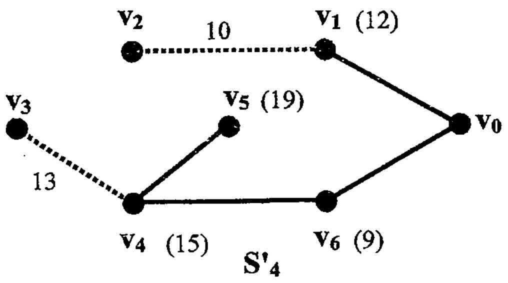
-2 $S'_4 = \{v_2, v_3\}$, $L(v_2) = 22$، $L(v_3) = 28$,

-3 أقل مسافة للرؤوس في S'_4 هي مسافة الرأس v_2،

-4 ليكن $\{v_0, v_1, v_2, v_4, v_5, v_6\} = S_5$.

5- $i = 5$. بما أن $i < 6$، أذهب إلى الخطوة الثانية.



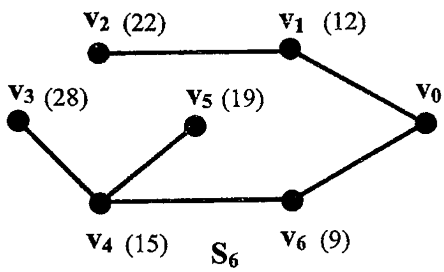


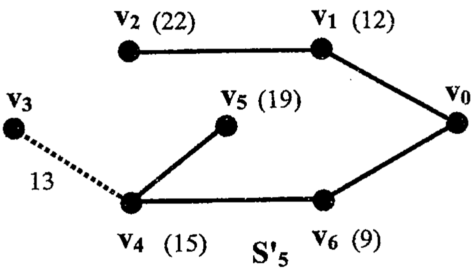
2- $S'_5 = \{v_3\}$، $L(v_3) = 28$,

3- أقل مسافة للرؤوس في S'_5 هي مسافة الرأس v_3،

4- ليكن $S_6 = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.

5- $i = 6$. بما أن $i = 6$، قف انتهت الخوارزمية.





وبالتالي المسافات عن v_0 بحسب الخوارزمية تكون كالتالي:

$d(v_0, v_0) = L(v_0) = 0,$ $\quad d(v_0, v_1) = L(v_1) = 12,$

$d(v_0, v_2) = L(v_2) = 22,$ $\quad d(v_0, v_3) = L(v_3) = 28,$

$d(v_0, v_4) = L(v_4) = 15,$ $\quad d(v_0, v_5) = L(v_5) = 19,$

$d(v_0, v_6) = L(v_6) = 9.$

(2-2-2) المسافة في البيان الموجه (Distance in Digraph).

ليكن البيان الموجه D(V, A). نعرف المسافة بين الرأسين $u, v \in V(G)$ بأنها أقصر مسار موجه بينهما ونرمز لذلك $\vec{d}(u,v)$ (بالطبع هي أقصر تتابع للأضلاع الموجهة من الرأس u إلى الرأس v). إذا لم يوجد أي مسار موجه من الرأس u إلى الرأس v، عندئذٍ نقول إن المسافة بينهما غير معرفة ونعبر عن ذلك $\vec{d}(u,v)=\infty$. المسافة بين الرأس ونفسه تساوي الصفر. نستنتج مما سبق أن

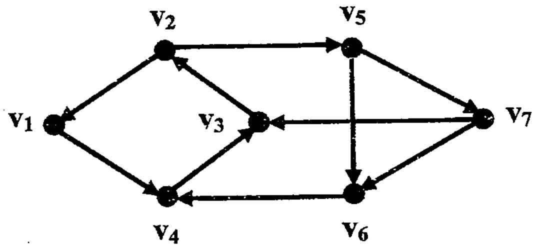
1) $\vec{d}(u,v) \neq \vec{d}(v,u)$،

2) $\vec{d}(u,w)+\vec{d}(w,v) \geq \vec{d}(u,v)$.

نقول عن البيان الموجه D(V, A) إنه متصل بشدة (strongly-connected)، إذا كان لكل رأسين مختلفين $u, v \in V(D)$ يوجد مسار موجه من u إلى v وكذلك يوجد مسار موجه من v إلى u.

يمكن تعريف الاختلاف المركزي u من البيان الموجه D(V, A) وكذلك القطر ونصف القطر بالإضافة لمركز البيان كما عرفناها في البيان غير الموجه مع الأخذ بعين الاعتبار رمز المسافة $\vec{d}(u,v)$ بدلاً من d(u, v) وذلك لأجل أي رأسين u و v.

مثال (2-5): ليكن البيان الموجه D(V, A) في الشكل (2-6) والمطلوب حساب نصف القطر، القطر والمركز.



الشكل (2-6)

الحل بسهولة كما في المثال (2-4) مع ملاحظة التوجيه بين الرؤوس. نحسب جدول المسافات للبيان D(V, E) والذي ينتج بالشكل التالي:

$\vec{d}(v_i, v_j)$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	$e(v_i)$
v_1	0	3	2	1	4	5	5	5
v_2	1	0	3	2	1	2	2	3
v_3	2	1	0	3	2	3	3	3
v_4	3	2	1	0	3	4	4	4
v_5	4	3	2	2	0	1	1	4
v_6	4	3	2	1	4	0	5	5
v_7	3	2	1	2	3	1	0	3

الجدول (2-2)

من الجدول نجد أن $\overrightarrow{rad}(D)=3$ ، $\overrightarrow{daim}(D)=5$ و $\vec{Z}(D)=\{v_2, v_3, v_7\}$

نلاحظ أن المبرهنة (2-3)، غير صحيحة في حالة البيان الموجه.

ملاحظة (2-2): يمكن تطبيق خوارزمية ديجكسترا على البيان الموجه كما هي في البيان غير الموجه، بشرط أمكانية الوصول إلى كل الرؤوس من الرأس v_0.

(3-2) الترابط في البيان (Connectivity in Graph).

كما عرفنا سابقاً البيان المترابط بأنه يتميز بوجود مسار بين كل رأسين مختلفين فيه ويكون غير مترابط إذا احتوى رأسين لايوجد بينهما مسار.
إذا كان البيان $G(V, E)$ غير مترابط، عندئذٍ نسمي عدد البيانات الجزئية المترابطة المكونة للبيان G، بمركبات البيان ونرمز لذلك $k(G)$. عندما يكون البيان G مترابطاً فإن $k(G) = 1$.

مبرهنة (2-4): ليكن $G(p, q)$ بياناً مترابطاً, عندئذٍ $p-1 \leq q$.

البرهان: بطريقة الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس p.
إذا كان $p = 1$ عندئذٍ $q = 0$ والمبرهنة صحيحة. لنفرض أن المبرهنة صحيحة من أجل كل البيانات والتي عدد رؤوسها $1 \leq p_1 \leq p - 1$ أي تحتوي على الأقل $p_1 - 1$ ضلع. ليكن G بياناً له p رأس، إذا كان لكل رأس في G على الأقل درجة 2، عندئذٍ بحسب المبرهنة (1-1) يكون $2p \leq 2q$ ومنه $p -1 \leq p \leq q$.
لنفرض أن G يحتوي رأساً u درجته 1. إذا حذفنا الرأس u مع الضلع الواقع عليه نحصل على بيان مترابط G_1 عدد رؤوسه $p_1 = p -1$ وعدد أضلاعه $q_1 = q -1$ بحسب الاستقراء على عدد الرؤوس نحصل على $p_1 - 1 \leq q_1$ ومنه ينتج

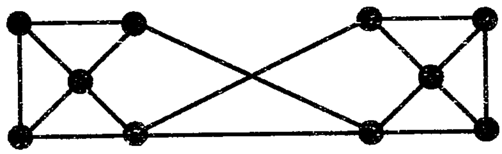
$$q = q_1 + 1 \geq p_1 = p -1.$$

والمبرهنة صحيحة.□

ليكن البيان المترابط $G(V, E)$. نقول عن مجموعة الرؤوس U في البيان G, إنها مجموعة قاطعة (vertex-cut), إذا كان $k(G - U) > k(G)$. نسمي الرأس $v \in G$ برأس قاطع للبيان G، إذا كانت المجموعة U تحوي الرأس v فقط, أي أن $k(G - v) > k(G)$. بالطبع البيان التام ليس له مجموعة رؤوس قاطعة ولا

رأس قاطع. نسمي أقل عدد من الرؤوس التي بحذفها يصبح البيان غير مترابط بعدد ترابط البيان ونرمز لذلك $\kappa(G)$. نقول عن البيان إنه n- مترابط (n-connected) إذا كان $\kappa(G) \geq n$.

مثال (6-2): ليكن البيان $G(V, E)$ الموضح في الشكل (7-2).



الشكل (7-2)

نلاحظ أن البيان في الشكل (7-2) له عدد ترابط $\kappa(G) = 2$.

مبرهنة (5-2): ليكن $G(V, E)$ بياناً مترابطاً. الرأس $v \in G(V, E)$ يكون رأساً قاطعاً للبيان G إذا وفقط إذا كان هناك رأسان u و w مختلفين عن v، بحيث إن الرأس v يقع على كل مسار بينهما في G.

البرهان: ليكن v رأساً قاطعاً للبيان G، عندئذٍ يكون البيان $G - v$ غير مترابط. إذا كان الرأسان u و w من مركبتين مختلفتين للبيان $G - v$، عندئذٍ لايوجد مسار u-w في $G - v$. بما أن G مترابط فإنه يوجد u-w مسار في G، ومنه نستنتج أن كل مسار u-w في G يحتوي الرأس v.

العكس: لنفرض أن هناك رأسين $u, w \in G$ بحيث إن الرأس v يقع على كل مسار u-w في G. عندئذٍ لايوجد u-w مسار في $G - v$. ذلك يؤدي إلى أن البيان $G - v$ غير مترابط وأن الرأس v رأس قاطع للبيان G.□

مبرهنة (2-6): (Chartrand & Lesniak, 1986) كل بيان غير تافه يحتوي على الأقل رأسين غير قاطعين.

البرهان: يترك البرهان كتمرين للطالب.□

بشكل مشابه لتعريف الرأس القاطع وعدد الترابط نعرف الضلع القاطع ومجموعة الأضلاع القاطعة. نرمز لأقل عدد من الأضلاع القاطعة للبيان المترابط G، بـ $\kappa_1(G)$. إذا كان $\kappa_1(G) = 1$، عندئذٍ نسمي الضلع القاطع جسراً (bridge). عدد الترابط للأضلاع (edge-connectivity) في البيان المترابط يكون عدد أقل مجموعة من الأضلاع بحذفها يصبح البيان غير مترابط. نرمز بـ n-ضلع مترابط (n-edge connected) إذا كان $\kappa_1(G) \geq n$. بالطبع $\kappa_1(K_p) = p - 1$.

مثال (2-7): نلاحظ أن البيان في الشكل (2-7) له عدد ترابط للأضلاع $\kappa_1(G) = 3$.

مبرهنة (2-7): ليكن البيان المترابط G(V, E)، عندئذٍ الضلع $e \in E(G)$ يكون جسراً إذا وفقط إذا كان يوجد رأسان $u, v \in V(G)$ بحيث إن الضلع e يقع على كل u-v مسار في G.

البرهان: بشكل مشابه لبرهان المبرهنة (2-5).□

مبرهنة (2-8): ليكن البيان المترابط G(V, E)، عندئذٍ الضلع $e \in E(G)$ يكون جسراً إذا وفقط إذا كان لايقع على حلقة G.

البرهان: لنفرض أن $e = xy$ جسر في G. حسب النظرية (2-7). جميع المسارات u-v تمر بالضلع e. لنبرهن أن e لايقع على حلقة. لنفرض أن P: u-v مسار في G. بالطبع P يمر بالضلع e. في البيان $G - e$، هناك يكون المسار P_1: u-x والمسار P_2: y-v. إذا كان الضلع e يقع على حلقة ما، عندئذٍ يوجد مسار x-y في البيان $G - e$ وهذا يناقض حقيقة أن u و v لايرتبطان بمسار في $G - e$.

العكس: لدينا $e = xy$ لايقع على حلقة في G, ولنفرض e ليس جسراً. بما أن x-y مسار (أي الضلع e هو نفسه مسار) في G، عندئذٍ x و y ينتميان لنفس المركبة في G. هذا يؤدي إلى أن x و y ينتميان لنفس المركبة في $G - e$ وبالتالي يوجد مسار P: x-y في $G - e$. مما سبق نستنتج أن المسار P مع الضلع e يشكلان حلقة في G وهذا تناقض. □

مبرهنة وايتني (2-9) (Whitney Theorem, 1932): البيان G(p, q) حيث $3 \le p$، يكون 2–مترابطاً إذا وفقط إذا كان أي رأسين في G يقعان على حلقة مشتركة.

البرهان: يترك البرهان كتمرين للطالب.□

مبرهنة وايتني (2-10) (Whitney Theorem, 1932): لأجل أي بيان G، يكون $\kappa(G) \le \kappa_1(G) \le \delta(G)$.

البرهان: إذا كان G غير مترابط، عندئذٍ $\kappa_1(G) = 0$ وبالتالي $\kappa_1(G) \le \delta(G)$. إذا كان G مترابطاً، يصبح غير مترابط بإزالة جميع الأضلاع الواقعة على رأس أصغر درجة في البيان وهذا يؤدي إلى أن $\kappa_1(G) \le \delta(G)$.

لبرهان الطرف الأول من المتراجحه، إذا كان G غيـــر متـــرابط أو تافهـــاً فـــإن $\kappa(G) = \kappa_1(G) = 0$.

إذا كان G بياناً مترابطاً وله جسر عندئذٍ $\kappa(G) = \kappa_1(G) = 1$ وهذا يكون عنـــدما $G = K_2$ أو G مترابط وله رأس قاطع. إذا كان $\kappa_1(G) \geq 2$، عندئذٍ إذا حـــذفنا $\kappa_1(G) - 1$ ضلع فإن البيان الباقي سيحتوي على جسر. ليكن $e = uv$.

لنحذف أي ضلع من غير الـــ $\kappa_1(G) - 1$ ضلع المختارة، وأي رأس طرفي مـــن غير الرأسين u أو v. إذا حصلنا على بيان غير مترابط، عندئذٍ $\kappa(G) < \kappa_1(G)$.

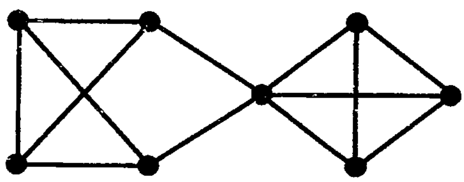
إذا كان البيان الناتج مترابطاً، عندئذٍ يحتوي الجسر e وبحذفه مع إحدى الرؤوس u أو v نحصل على بيان غير مترابط. في كلتا الحـــالتين نجـــد أن $\kappa(G) \leq \kappa_1(G)$ وبهذا يكون إثبات الطرف الأول للمتراجحة.□

هل يمكن إيجاد بيان بحيث تتحقق متراجحة وايتني بالشكل التالي $\kappa(G) < \kappa_1(G) < \delta(G)$.

المثال التالي يوضح ذلك:

مثال (2-8): ليكن البيان الموضح في الشكل (2-8).

نلاحظ أن $\delta(G) = 3$، $\kappa(G) = 1$ و $\kappa_1(G) = 2$



الشكل(2-8)

مبرهنة (2-11): إذا كان G بياناً غير مترابط، عندئذٍ $\overline{G}$ يكون بياناً مترابطاً.

البرهان: ليكن u و v رأسين من البيان $\overline{G}$ وبالتالي هما من البيان G. إذا كان u و v ينتميان إلى مركبتين مختلفتين من البيان G، عندئذٍ $uv \in \overline{G}$. ليكن u و v ينتميان إلى نفس المركبة ولتكن G_1 من البيان G وليكن الرأس w من مركبة أخرى G_2 من G، عندئذٍ $uw, vw \in E(\overline{G})$. في كل الأحوال يكون الرأس u مترابطاً مع الرأس v في البيان $\overline{G}$، مما سبق ينتج لدينا $\overline{G}$ مترابطاً.□

مبرهنة (2-12) (Behzad & Chartrand & Lesniak-Foster,1981):
ليكن البيان G(V, E) من المرتبة $(p \geq 2)$ والبيان المتمم له $\overline{G}$ ، عندئذٍ يكون كل من G و $\overline{G}$ بياناً مترابطاً إذا وفقط إذا كان G و $\overline{G}$ لايحتويان K(m, n) كبيان جزئي موسع لأجل قيم m و n التي تحقق $m + n = p$.

البرهان: يترك البرهان كتمرين للطالب.

مبرهنة (2-13): ليكن G(V, E) بياناً بسيطاً عدد رؤوسه p وعدد أضلاعه q وعدد مركباته k، عندئذٍ يكون $q \leq \frac{1}{2}(p-k)(p-k+1)$.

البرهان: ليكن $G_1, G_2, \ldots, G_k$ مركبات البيان G وأن $p_1, p_2, \ldots, p_k$ عدد رؤوسها على الترتيب. بما أن عدد أضلاع أي بيان بسيط مترابط برتبة p_i

لايزيد على $\frac{p_i(p_i-1)}{2}$, فأن عدد أضلاع البيان G لايزيد على $\frac{\sum_{i=1}^{k} p_i(P_i-1)}{2}$

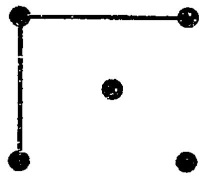
ليكن K_t و K_s بيانين تامين بحيث $1 \leq t \leq s$. إذا حذفنا من K_t رأساً مع جميع الأضلاع الواقعة عليه وأضفنا هذا الرأس إلى البيان K_s ثم وصلنا الرأس المضاف إلى كل رأس في K_s، عندئذٍ نحصل على K_{s+1} و K_{t-1}. تكون [illegible]

الأضلاع $s - t + 1$ وبدون أن يتغير مجموع عدد الرؤوس في البيانين. بتكرار العملية عدداً كافياً من المرات نحصل على K_{s+t-1} و K_1 ويبقى مجموع عدد الرؤوس كما هو ولكن يزداد عدد الأضلاع. إذا طبقنا العملية السابقة على مركبتين G_i و G_j من البيان G يحققان الشروط السابقة والناتج نطبقه مع بيان أخر فنحصل بالنتيجة على بيان تام K_{p-k+1} مع $k - 1$ رأس معزول وعدد أضلاعه يزيد على عدد أضلاع البيان الأصلي. مما تقدم نستنتج أن

$$q \leq \frac{\sum_{i=1}^{k} p_i(p_i - 1)}{2} \leq \frac{(p-k)(p-k+1)}{2}$$ وهو المطلوب.□

تعميماً لفكرة المتمم الذاتي للبيان $G(p, q)$. يكون البيان $G(p, q)$ n-متمم (n-complementary) حيث $(n \geq 2)$، إذا كان يمكن تجزئة K_p إلى n بيان جزئي لها رؤوس البيان G ومجموع أضلاعها يكون أضلاع G وبحيث كل منها يماثله.

مثال (2-9): ليكن البيان G الموضح بالشكل (2-9).



الشكل (2-9)

نلاحظ أنه يمكن تجزئة K_5 إلى خمس نسخ من البيان G. وبالتالي يكون البيان G، 5-متمماً.

قدم هراري، روبينسن و ورملد (Harary, Robinson and Wormald) الشرط اللازم والكافي ليكون للبيان $G(p, q)$، n-متمم من خلال المبرهنة التالية

والتي نقبلها بدون برهان.

مبرهنة (2-14) (Harary, Robinson and Wormald):

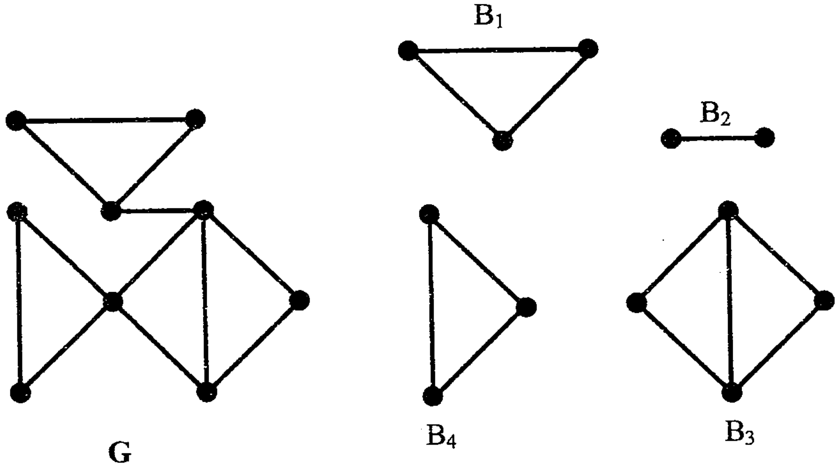
ليكن البيان $G(p, q)$، عندئذٍ يكون هناك n–متمم ذاتي للبيان G إذا وفقط إذا كان $\binom{p}{2}\bmod(n)\equiv 0$.

عندما يكون $n = 2$ ينتج تعريف البيان المتمم الذاتي وكمثال على ذلك البيان K_5 يكون 2–متمماً لـ C_5.

(2-4) الكتل في البيان (Blocks in Graph).

ليكن البيان المترابط $G(p, q)$ $(p \geq 2)$. نسمي البيان G كتلة (block) إذا كان لايحتوي على رأس قاطع. ونسمي أكبر بيان جزئي على مجموعة جزئية من الرؤوس في البيان G لايحتوي على رأس قاطع كتلة في البيان G. أقل عدد من الكتل في البيان G, نرمز لها $B(G)$.

مثال (2-10): ليكن البيان G الموضح بالشكل (2-10). نلاحظ أن البيان G يحتوي على أربع كتل موضحة بالشكل, أي $B(G) = 4$.



الشكل (2-10)

البيان G يكون كتلة حرجة (critical block)، إذا كان كتلة ولأجل أي رأس v لايكون البيان $G - v$، كتلة. بشكل مشابه، البيان G يكون كتلة صغرى (minimal block)، إذا كان كتلة ولأجل أي ضلع e لايكون البيان $G - e$ كتلة.

مبرهنة (2-15): (Chartrand & Lesniak,1986) البيان $G(p, q)$ حيث $p \geq 3$)، يكون كتلة إذا وفقط إذا كان كل رأسين فيه يقعان على حلقة مشتركة في G.

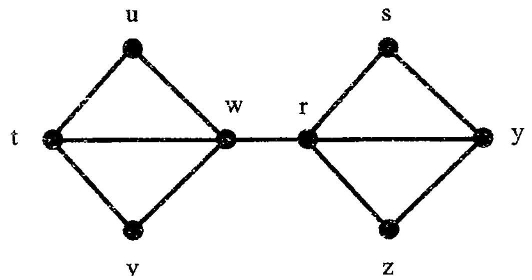
البرهان: يترك البرهان كتمرين للطالب.

مبرهنة (2-16): ليكن البيان المترابط G، عندئذ مركزه يقع في كتلة واحدة.

البرهان: لنفرض أن G بيان مترابط ومركزه $Z(G)$ لايقع ضمن كتلة واحدة، عندئذ للبيان G رأس قاطع v بحيث إن $G - v$ يحتوي مركبتين G_1 و G_2 وكل مركبة منهما تحتوي على عناصر من $Z(G)$. ليكن $u \in G$ رأساً بحيث إن $d(u, v) = e(v)$ وليكن P_1 مساراً له الطول $e(v)$، عندئذ إحدى المركبات G_1 و G_2، لاتحتوي رؤوساً من المسار P_1 ولتكن المركبة G_2. ليكن w رأس من $Z(G)$ ينتمي إلى G_2 وليكن P_2 أقصر w-v مسار. إن P_1 و P_2 يشكلان المسار P_3: u-w وليس بالضرورة أن يكون أقصر مسار من u إلى w. مما سبق ينتج أن $e(W) > e(v)$ وهذا يناقض تعريف عناصر مركز البيان والتي لها أصغر بعد مركزي أي يتناقض مع أن $w \in Z(G)$. ينتج أن $Z(G)$ يقع في كتلة واحدة.□

تمـــــــــــارين:

1. جد كل المسالك من الطول 4 أو 5 من الرأس u إلى الرأس z في البيان التالي:

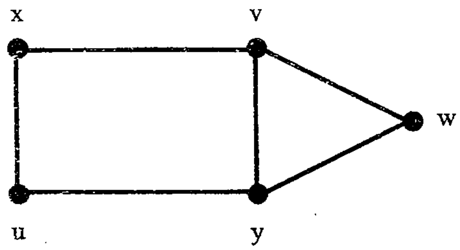


2. ليكن u و v أي رأسين في البيان المترابط G. برهن أنه يوجد مسلك u-v يضم كل الرؤوس في G.

3. ليكن u و v رأسين في K_4. جد عدد المسالك من الطول 2 و 3.

4. ليكن u و v رأسين غير متجاورين في K(3, 3). جد عدد المسالك من الطول 2 و 3.

5. ليكن البيان الموضح في الشكل اللآتي والمطلوب: أي من متتاليات الرؤوس تشكل مسلكاً, رحلة, مساراً, حلقة, دورة. وما طول كل منها.



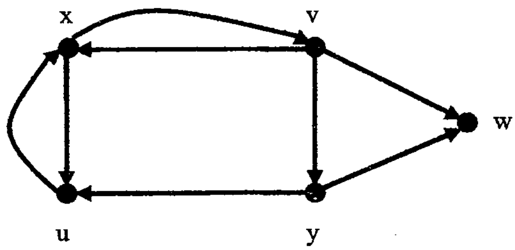
a. ⟨u, y, v, w, v⟩.

b. ⟨u, y, u, x, v, w, u⟩.

c. ⟨y, v, u, x, v, y⟩.

d. ⟨w, v, x, u, y, w⟩.

6. ليكن البيان الموجه الموضح في الشكل اللآتي والمطلوب: أي من متتاليات الرؤوس تشكل مسلكاً موجهاً, رحلة موجهةً, مساراً موجهاً, حلقة موجهةً, دورة موجهةً. وما طول كل منها.



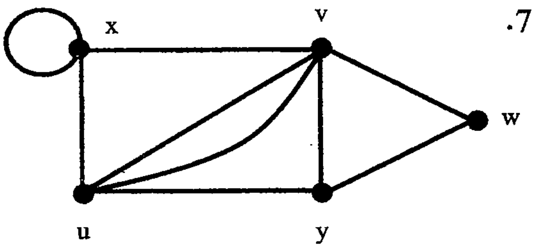
a. ⟨x, v, y, w, v⟩.

b. ⟨x, u, x, u, x⟩.

c. ⟨x, u, v, y, x⟩.

d. ⟨x, v, y, w, v, u, x⟩.

7. ليكن البيان الموضح في الشكل اللآتي والمطلوب إيجاد:



a. مسلك من الطول 7.

b. مسلك من الطول 10.

c. أطول مسار.

d. كل الحلقات من الطول 3.

e. كل الحلقات من الطول 4.

8. أثبت المبرهنة (2-1).

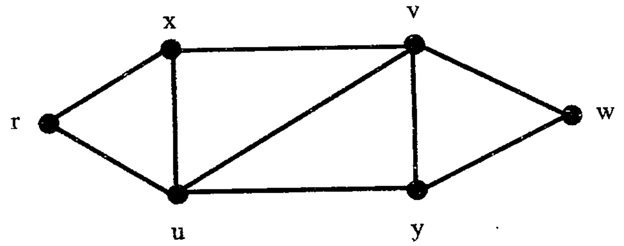
9. ليكن $G(p, q)$ بياناً, بحيث إن $\delta(G) \geq (p-1)/2$. برهن أن G بيان مترابط.

10. ليكن D بياناً موجهاً بحيث إن الدرجة الخارجية لكل رأس أكبر من الصفر. برهن أن D يحتوي حلقة موجهة.

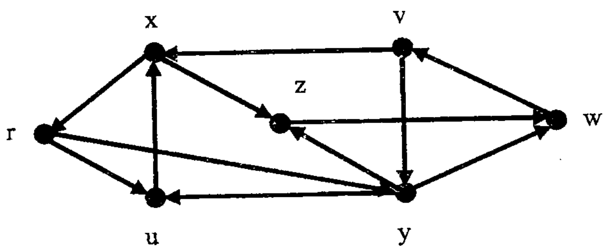
11. أثبت المبرهنة (2-6).

12. أثبت المبرهنة (2-7).

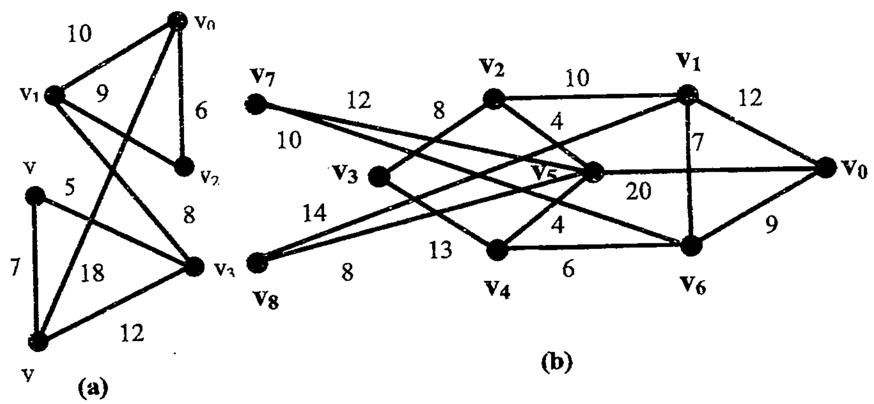
13. ليكن البيان الموضح في الشكل الآتي. جد نصف القطر، القطر والمركز.



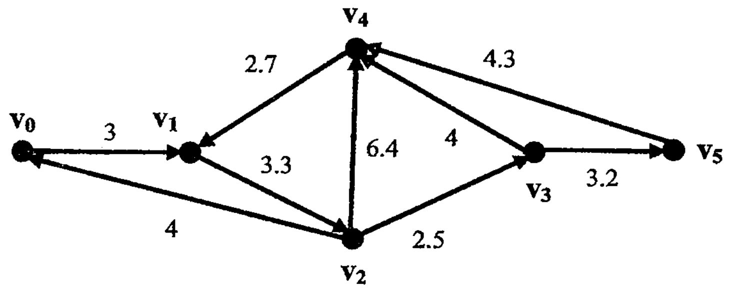
14.ليكن البيان الموجه D الموضح الآتي. جد نصف القطر، القط والمركز.



15. باستخدام خوارزمية ديجكسترا, جد المسافات عن الرأس v_0 للبيانات التالية :(a), (b)



16. باستخدام خوارزمية ديجكسترا, جد المسافات عن الرأس v_0 في البيان الموجه $D(V, A)$ الموضح في الشكل التالي:



17. برهن أنه إذا كان G بياناً مترابطاً من المرتبة p, عندئذٍ يكون على الأقل من القياس p -1.

18. أثبت أن كل دورة في البيان $G(p, q)$ تحوي حلقة.

19. أثبت أنه إذا كان البيان G من الرتبة p بحيث $\delta(G) \geq p/2$, عندئذٍ $\kappa_1(G) = \delta(G)$.

20. لنفرض البيان $G(p, q)$, حيث $\kappa(G) = n \geq 1$ و $\kappa_1(G) = m \geq 1$. حدد القيمة الممكنة للمقادير التالية:

$$\kappa(G - v), \kappa_1(G - v), \kappa(G - e), \kappa_1(G - e).$$

حيث $v \in V(G), e \in E(G)$.

21. ليكن البيان $G(p, q)$, حيث $\kappa(G) = n$ وليكن $v, v_1, \ldots, v_n$, $(n+1)$ رأس من G. برهن أن $v - v_i$ مسار متمايز لأجل $i = 1, \ldots, n$.

22. برهن أنه إذا كان البيان G لايحتوي رؤوساً من الدرجة الفردية, عندئذٍ G لايحتوي جسوراً.

23. أرسم البيانات التالية أو علل السبب لعدم إمكانية الرسم.

a. G بيان من الرتبة 6, بحيث $\kappa(G) = 2$ و $\kappa_1(G) = 2$.

b. G بيان مترابط من الرتبة 11 والقياس 10, بحيث لايحتوي رأساً قاطعاً.

c. G بيان 3-مترابط, بحيث يحتوي جسراً فقط.

d. G بيان 2-مترابط من الرتبة 8, بحيث يحتوي جسرين فقط.

24. ماهو عدد الترابط للرؤوس وعدد الترابط للأضلاع في البيانات التالية:

a. $K(4, 7)$, $K(3, 4, 5)$, $K(m, n)$.

b. Q_4.

c. بيان بيترسن.

25. أعطِ مثالاً في كل من الحالات التالية:

a. $\kappa(G) = \kappa_1(G) = \delta(G)$.

b. $\kappa(G) = \kappa_1(G) < \delta(G)$.

c. $\kappa(G) < \kappa_1(G) = \delta(G)$.

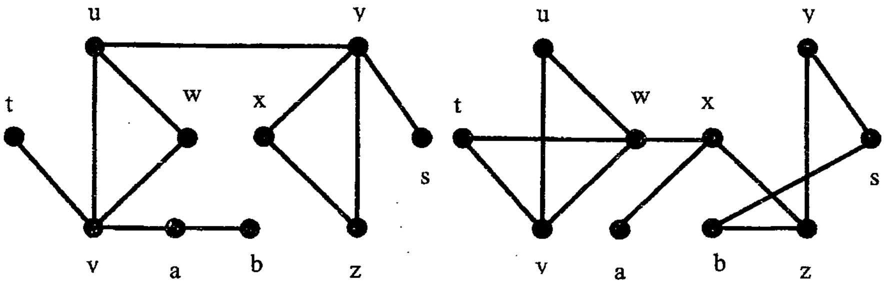
d. $\kappa(G) < \kappa_1(G) < \delta(G)$.

26. ليكن G أي بيان يحتوي على حلقة واحدة, أثبت أن $\kappa_1(G) \leq 2$.

27. أثبت المبرهنة (2-9).

28. أثبت المبرهنة (2-12).

29. ماهي كتل البيانات الموضحة في الشكلين (a) و (b).



(a) **(b)**

30. جد بيانين مترابطين غير متماثلين, كل منهما من الرتبة 6 ومن القياس 6 بحيث لكل منهما 3 كتل.

31. أثبت المبرهنة (2-15).

الفصـــل الثـــالـــث

الأشـــــجـــار

Trees

الأشجار نوع من البيانات يتميز بأهميته الخاصة في التطبيقات المختلفة في الحياة العملية. ولاسيما في دراسة علوم الحاسب لتخزين واسترجاع المعلومات عن طريق ترتيب وتصنيف البيانات وربطها لتشكيل قاعدة بيانات. وفي الرياضيات والعلوم النظرية, تستخدم الأشجار لحل كثير من المسائل في دراسة تعقيد عمليات التصنيف والترتيب والفرز. كما تستخدم في العمليات التنظيمية الهرمية لتبسيط آلية ربط القواعد برأس الهرم عن طريق روابط من السهل حساب كلفتها. إن بساطة الأشجار وسهولة دراستها تمكننا من تعميم نتائج الدراسة على البيان. في هذا الفصل سوف نتعرض لبعض الميزات الأساسية للأشجار والأشجار المولدة للبيان.

(1-3) الميزات الأساسية للأشجار (Fundamental Properties of Trees)

الشجرة (tree) هي بيان مترابط خالٍ من الحلقات والبيان غير المترابط الذي لايحوي حلقات يسمى غابة (forest) وبناءً على تعريف الغابة فإن الشجرة غابة مؤلفة من مركبة وحيدة.

هناك عدة تعاريف للشجرة متكافئة فيما بينها وتتضمنها المبرهنة التالية:

مبرهنة (1-3): ليكن $T(p, q)$ بياناً، عندئذٍ العبارات الآتية متكافئة:

1. T شجرة.
2. بين كل رأسين في T مسار وحيد.
3. T مترابط وكل ضلع فيه هو جسر.
4. T مترابط وعدد أضلاعه $(p-1)$.
5. عدد أضلاع T هو $(p-1)$ ولايحتوي على حلقات.
6. T لايحتوي على حلقات. لكن إذا وصلنا أي رأسين غير متجاورين فيه ينتج لدينا بياناً يحتوي على حلقة واحدة فقط.

البرهان: 1 ⇐ 2. ليكن u و v أي رأسين في T. بما أن T مترابط يوجد مسار واحد على الأقل بين u و v. لنفرض أن P_1 و P_2 مساران مختلفان بين u و v، عندئذٍ هناك ضلع في أحدهما لاينتمي إلى الأخر وليكن الضلع (x, y) ينتمي إلى P_1 ولاينتمي إلى P_2. يؤدي الفرض السابق إلى وجود مسار P بين الرأسين x و y ولايحتوي على الضلع (x, y). وهذا يؤدي إلى أن $P\cup(x, y)$ حلقة في T وهذا تناقض مع كون T شجرة ومنه نستنتج أن $P_1 = P_2$.

2 ⇐ 3. لدينا T مترابط. لنفرض $e = (u, v)$ وهو ضلع كيفي في T، عندئذٍ البيان $T_1 = T - e$ غير مترابط وإلا T تحتوي مسارين بين u و v وهذا يناقض وجود مسار وحيد بينهما في T، ومنه نستنتج أن e جسر.

3 ⇐ 4. بطريقة الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس p.

إذا كان $p = 1$ فان $q = 0$. وإذا كان $p = 2$ فان $q = 1$. لنفرض أن النظرية صحيحة من أجل عدد الرؤوس $p - 1$، عندئذٍ يكون عدد الأضلاع $q = p - 2$ ولنبرهن صحتها من أجل عدد الرؤوس p. ليكن T بياناً مترابطاً عدد رؤوسه p. بما أن كل ضلع في T هو جسر، فإذا حذفنا أي ضلع نحصل على مركبتين T_1 و T_2. عدد رؤوس أي من المركبتين أقل من p وليكن على الترتيب p_1 و p_2. بفرض استقراء، عدد أضلاع T_1 و T_2 يكون $p_1 - 1$ و $p_2 - 1$ على الترتيب. منه نستنتج عدد أضلاع T:

$$(p_1 - 1) + (p_2 - 1) + 1 = (p_1 + p_2) - 1 = p -1.$$

4 ⇐ **5**. عدد أضلاع T يكون $p - 1$ ولنبرهن أنه لايحتوي حلقات.
لنفرض العكس: أي أن عدد أضلاع T هو $p - 1$ ويحتوي على حلقات. ليكن e ضلعاً يقع على حلقة في T, عندئذٍ بحذف e يبقى T مترابطاً ويحتوي على $p - 2$ ضلع وهذا تناقض مع المبرهنة (2-4).

5 ⇐ **6**. لنثبت أن T مترابط. إذا كان للبيان T المركبات $T_1, T_2, \ldots, T_k$. فإن T_i مترابط ولايحتوي على حلقات لأجل $i = 1, 2, \ldots, k$. بما أن من (1) إلى (4) صحيح بالتتابع، فان عدد أضلاع T_i يكون $p_i - 1$. حيث p_i، عدد رؤوس T_i. ومنه يكون عدد أضلاع T هو $p - k$. إذاً $k = 1$, ومنه ينتج أن T مترابط وبالتالي شجرة. من (2) بين كل رأسين u و v غير متجاورين في T, يوجد مسار وحيد. الآن إذا أضفنا الضلع (u, v) إلى T, عندئذٍ نحصل على حلقة وحيدة وبالتأكيد تضم الرأسين المذكورين.

6 ⇐ **1**. لنفرض أن T غير مترابط. إذا أضفنا ضلعاً بين مركبتين مختلفتين لانحصل على حلقة وهذا تناقض مع (6). إذاً T مترابط ولايحتوي على حلقات. منه نستنتج أن T شجرة.□

نتيجة (3-1): الغابة المكونة من p رأس و k مركبة يكون عدد أضلاعها p − k.

نتيجة (3-2): كل شجرة عدد رؤوسها أكبر أو يساوي 2، تحتوي على الأقل رأسين من الدرجة 1.

(3-2) الأشجار المولدة للبيان (Spanning Trees of Graph).

ليكن البيان المترابط G(V, E), حيث $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. نعرف الشجرة المولدة للبيان G (spanning tree) بأنها شجرة لها رؤوس البيان وأضلاعها تكون مجموعة جزئية من أضلاعه. أي يمكن أن نحصل على الشجرة المولدة للبيان بحذف ضلع من كل حلقة فيه حتى نحصل على بيان مترابط خالٍ من الحلقات. بالطبع الشجرة المولدة للبيان هي بيان جزئي منه وبالتالي يمكن أن يوجد أكثر من شجرة مولدة للبيان وفي كل الأحوال لكل بيان مترابط شجرة مولدة واحدة على الأقل. الغابة المولدة للبيان غير المترابط لها مركبات من الأشجار بعدد مركبات البيان بحيث كل شجرة تكون مولدة لأحدى المركبات.

مبرهنة (2-3) (Behzad & Chartrand & Lesniak-Foster,1981): ليكن $G(V, E)$ بياناً مترابطاً. كل شجرة مولدة T تشترك بضلع واحد على الأقل مع كل مجموعة قاطعة.

البرهان: يترك البرهان كتمرين للطالب.

والسؤال، ماهو عدد الأشجار غير المتطابقة والمولدة لبيان له p رأس. في البداية نعرض لنظرية كيلي والتي تعطي عدد الأشجار الممكن تشكيلها من p رأس. قبل عرض نظرية كيلي نشير إلى أن البيان المرمز (labelled graph)، هو بيان مع تطبيق غامر ومتباين من مجموعة الرؤوس إلى مجموعة الأعداد الطبيعية $\{1, 2,\ldots, p\}$ حيث p هو عدد رؤوس البيان.

مبرهنة (3-3) (Cayley's Tree Formula): عدد الأشجار غير المتطابقة T من الرتبة p يكون p^{p-2}.

البرهان: ليكن N عدد الأشجار غير المتطابقة على p رأس والمرمزة بالرؤوس $v_1, v_2, \ldots, v_p$. ليكن $d = 1, 2, \ldots, p-1$، نرمز بـ N_d لعدد الأشجار والتي تحقق $\deg(v_p) = d$. نلاحظ أن

$$N=\sum_{d=1}^{p-1} N_d$$

لتكن 'T شجرة من النوع $d - 1$، $(d = 2, 3,\ldots, p-1)$، وليكن v_i $(i \neq p)$ رأساً غير مجاور للرأس v_p. لنفرض أن الرأس v_j مجاور للرأس v_i ويقع على المسار الوحيد $v_i - v_p$. نعرف الارتباط لأزواج (T, T') من الأشجار بالشكل التالي = T

$T' + v_iv_p - v_iv_j$. بما أن كل شجرة من النوع $d - 1$ تكون مرتبطة بـ $p - 1 -$ $(d - 1)$ شجرة من النوع d والذي لايحتوي شجرتين متطابقتين. عندئذٍ مجموع الارتباطات بين النوعين N_{d-1} و N_d يكون $N_{d-1}(p - d)$.

الآن سوف نجد عبارة أخرى من الارتباطات. لتكن T شجرة من النوع d ولنفرض أن $v_1, v_2, \ldots, v_d$ رؤوس مجاورة للرأس v_p. لتكن T_i مركبات لـ $G - v_p$ تحتوي v_i حيث $i = 1, 2, \ldots, d$، و $|G_i| = p_i$ على الترتيب. أي شجرة من النوع $d - 1$ يمكن الحصول عليها من $T - v_iv_p$ $(i = 1, 2, \ldots, d)$ بإضافة ضلع بين v_i و v_j لاينتمي إلى T_i. عدد الأضلاع المختلفة يكون $p - 1 - p_i$ (لايمكن إضافة ضلع بين رأسين في T_i، أو بين v_i و v_p)، عندئذٍ عدد أشجار الارتباط لـ T يكون $\sum_{i=1}^{d}(p-1-p_i)$ بحيث لايكون شجرتين متطابقتين بينهما.

لدينا

$$\sum_{i=1}^{d}(p-1-p_i) = (d-1)(p-1),$$

وبالتالي مجموع الارتباطات يكون $(d - 1)(p - 1)N_d$.

بالتطابق بين عدد الارتباطات السابق والحالي نجد أن

$$(p - d)N_{p-1} = (d - 1)(p - 1)N_d \quad (\text{حيث } d = 2, \ldots, p - 1)$$

نعلم أن $N_{p-1} = 1$ وبالتالي نجد $N_{p-2} = (p - 2)(p - 1)$. بحساب N_{d-1} من N_d نحصل على

$$N_d = \sum_{d=1}^{p-1}\binom{p-2}{d-1}(p-1)^{p-d-1}.$$

عندئذٍ

$$N = \sum_{d=1}^{p-1} \binom{p-2}{d-1} (p-1)^{p-d-1} = \sum_{d=0}^{p-2} \binom{p-2}{d} (p-1)^{p-d-2},$$

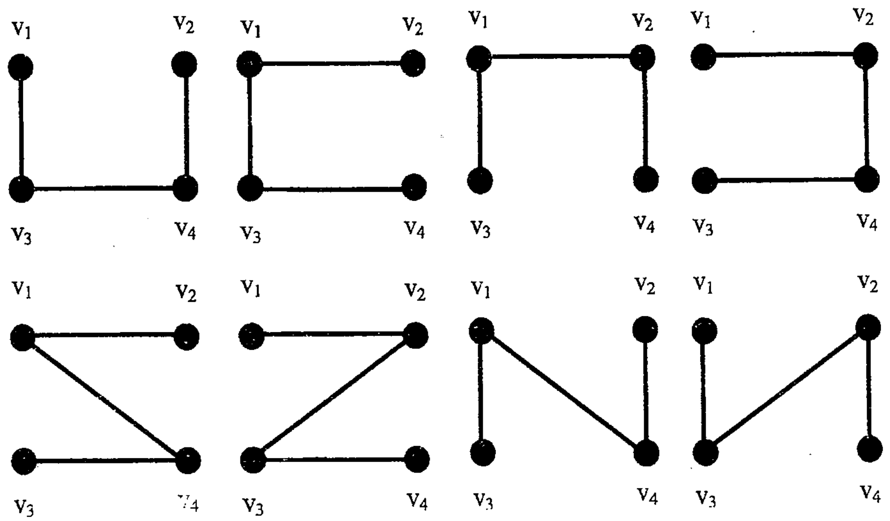
وهذه المعادلة هي منشور لذات الحدين, أي أن

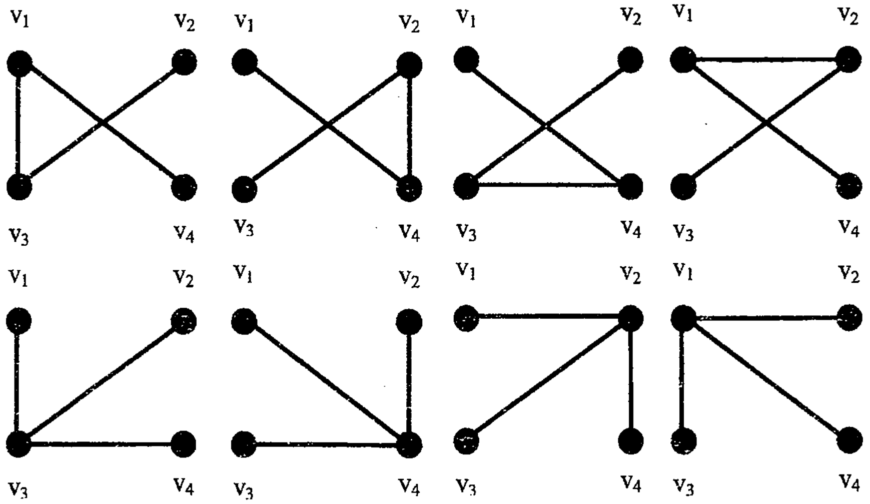
$$\sum_{d=0}^{p-2} \binom{p-2}{d} (p-1)^{p-d-2} \times 1^d = [(p-1)+1]^{p-2} = p^{p-2}. \square$$

نتيجة (3-3): عدد الأشجار للبيان التام K_p هو p^{p-2}.

مثال (3-1): جد الأشجار غير المتطابقة والمولدة للبيان K_4.

لدينا $16 = p^{p-2}$, والأشجار هي كما في الشكل (3-1):



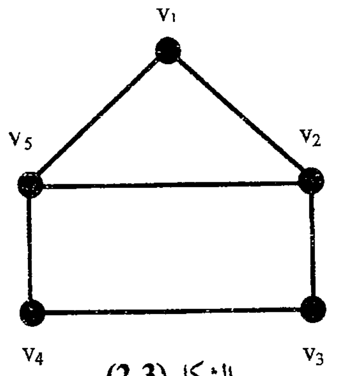


الشكل (1-3)

ليكن $G(V, E)$ بياناً مترابطاً. كيف نجد عدد الأشجار المولدة لهذا البيان. النظرية التالية والتي تدعى مصفوفة الأشجار, تعطينا عدد الأشجار لبيان كيفي. سوف نقبلها بدون برهان.

مبرهنة (4-3) (The matrix-tree theorem): ليكن $G(p, q)$ بياناً غير تافه له مصفوفة التجاور A ومصفوفة الدرجة C. عندئذٍ عدد الأشجار غير المتطابقة والمولدة للبيان G يكون قيمة المتمم الجبري لأي عنصر من عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة الأشجار $\Lambda = C - A$.

مثال (2-3): جد الأشجار غير المتطابقة والمولدة للبيان الموضح بالشكل (2-3).

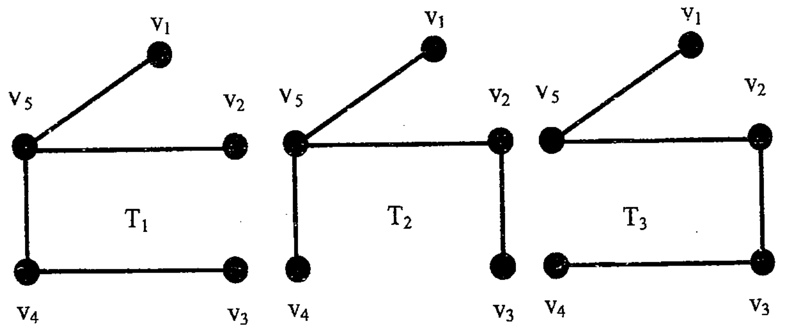


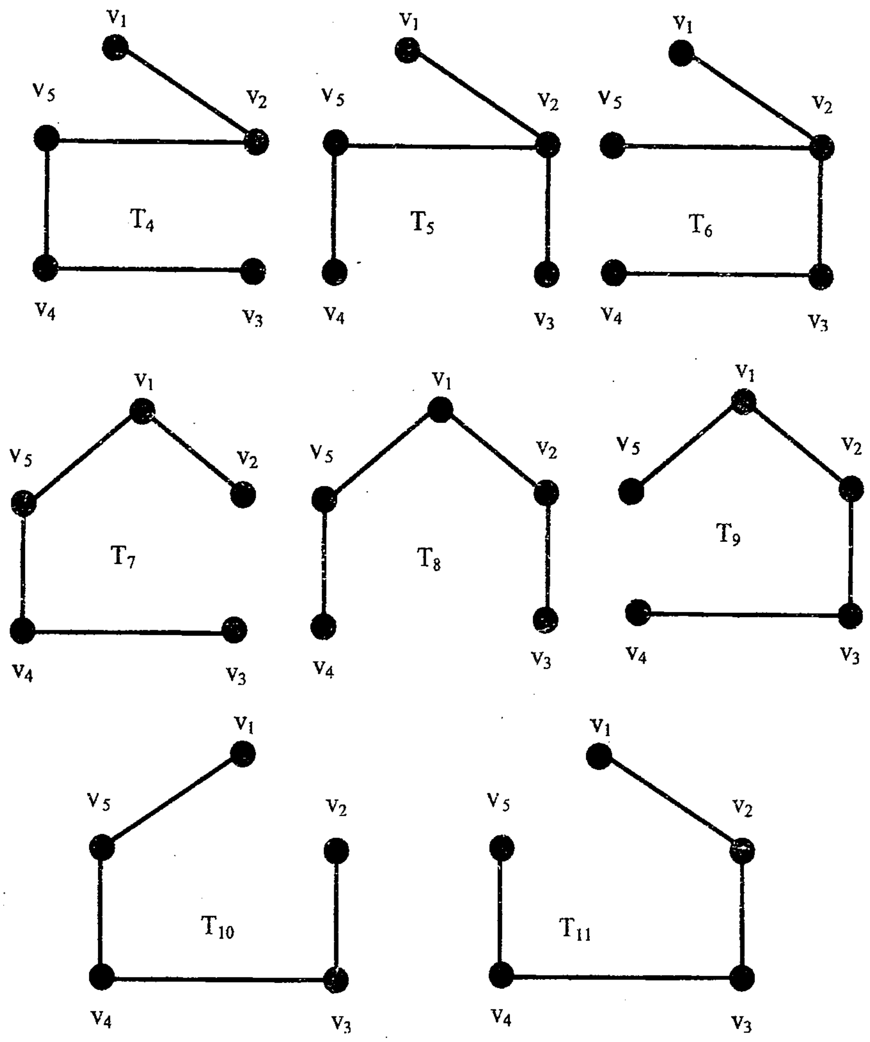
الشكل (2-3)

الحل: نكتب مصفوفة الأشجار Λ .

$$\Lambda=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(\Lambda-\Lambda_{55})=\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}=11$$

وتكون الأشجار المولدة للبيان كما في الشكل (3-3).





الشكل (3-3)

يجب ملاحظة أن قيمة المتتم الجبري لأي عنصر من عناصر القطر هو 11.

(3-3) أشجار القياس الصغرى الموزونة (Minimum Weight Trees)

البيان الموزون (weighted graph)، هو بيان G(V, E) فيه كل ضلع e أو رأس v (أو كليهما) مرفق بدالة وزن حقيقية موجبة تعبر عن طول مسافة بين مكانين (الرؤوس في البيان تعبر عن الأماكن) أو الزمن اللازم لرحلة بينهما وبشكل عام يعبر عن كلفة معينة وهذه الكلفة نطلق عليها وزن ونرمز لها بـ W(e) أو W(v). يسمح أحياناً بوجود أوزان سالبة ولاسيما في البيانات الموجهة, بشرط أن لايحتوي البيان على حلقة مجموع أوزانها قيمة سالبة.

في هذا البند سوف نعرض لمشكلة أساسية في نظرية البيان وهي مشكلة إيجاد أقصر الطرق بين مجموعة من المدن. حيث إن البحث عن أقصر الطرق له قيمة اقتصادية من ناحية الإنشاء أو من ناحية مسافة التنقل والزمن اللازم لقطع هذه المسافات بينها. سنعتبر أنه لإنشاء شبكة من الطرق بين مجموعة من المدن، يكفي إنشاء طريق واحد بين كل مدينتين وبالتالي الشبكة الناتجة هي شجرة بحيث مجموع المسافات (أي مجموع أطوال الأضلاع للشجرة الناتجة والتي تعبر عن أطوال المسافات بين المدن وهنا الرؤوس) تكون أقصر مايمكن.
يجب أن نلاحظ أن مجموع المسافات أو (مجموع الأوزان) هو مجموع أوزان أضلاع الشجرة. فإذا رمزنا لوزن الشجرة بـ W(T) فيكون

$$W(T)=\sum_{i=1}^{p-1} e_i \ .$$

بشكل أعم يمكن تحويل المسألة إلى إيجاد الشجرة المولدة للبيان المرمز G(V, E) بحيث يكون مجموع أوزان أضلاعها أصغر مايمكن.

فيما يلي سوف نعرض لخوارزمية كروسكال لإيجاد أصغر الأشجار المولدة للبيان الموزون G(V, E).

خوارزمية كروسكال (1-3) (Kruskal's Algorithm):

المعطيات: G(V, E) بيان مترابط موزون.

المخرجات: شجرة القياس الصغرى T(V, E(T)).

الطريقة: إيجاد الضلع التالي لأصغر وزن W(e) بحيث لايشكل حلقة مع الأضلاع المختارة سابقاً.

خطوات الخوارزمية:

1- ليكن $i \leftarrow 1$ و $T \leftarrow \varnothing$.

2- اختر ضلع e له وزن أصغري بحيث $e \notin E(T)$ وكذلك $T \cup \{e\}$ لايحتوي على حلقة. إذا كان e غير موجود, عندئذٍ توقف وإلا $e_i \leftarrow e$ و $T \leftarrow T \cup \{e_i\}$

3- إذا كان $i = p - 1$، عندئذٍ توقف وإلا $i \leftarrow i + 1$ وأذهب إلى 2.

مبرهنة(3-5): الشجرة المولدة للبيان G(V, E) والمختارة بطريقة كروسكال هي أصغر شجرة قياس له.

البرهان: ليكن $G(V, E)$ بياناً مترابطاً موزوناً غير تافه. بما أن الشجرة T الناتجة بخوارزمية كروسكال تتكون من p رأس و $p - 1$ ضلع ولاتحتوي على حلقات فهي شجرة مولدة للبيان G (لأن رؤوسها هي رؤوس البيان وأضلاعها هي مجموعة جزئية من أضلاعه). لنبرهن أن $W(T)$ أصغر مايمكن.

لتكن T' شجرة ما مولدة للبيان G ولنثبت أن $W(T) \leq W(T')$. ليكن $E(T) = \{e_1, e_2, \dots, e_{p-1}\}$. لدينا

$$W(T) = \sum_{i=1}^{p-1} e_i \ .$$

كذلك من خطوات الخوارزمية يكون

$$W(e_1) \leq W(e_2) \leq \dots \leq W(e_{p-1}).$$

لنفرض e_k أول ضلع من المتتالية $e_1, e_2, \dots, e_{p-1}$ لاينتمي إلى T'. البيان الجزئي $T' + e_k$ يحتوي على حلقة وحيدة وذلك بحسب المبرهنة (3-1). هذه الحلقة تحتوي على ضلع e' لاينتمي إلى T وبالتالي البيان الجزئي $T_1' = T' + e_k - e'$ يكون شجرة مولدة للبيان G. بحسب خطوات خوارزمية كروسكال في إيجاد T, فأن $W(e_k) \leq W(e')$ ومنه ينتج أن

$$W(T_1') \leq W(T').$$

نلاحظ أن T_1' تشترك مع T بضلع واحد زيادة على الأضلاع المشتركة بين T' و T. بتكرار العملية السابقة على T_1' بدلاً من T, نحصل على T_2' بحيث إن

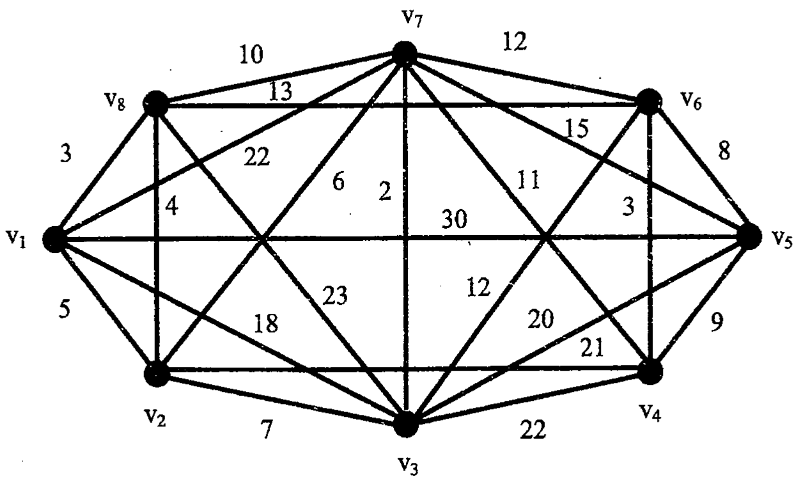
$$W(T_2') \leq W(T_1').$$

وهكذا نستمر بهذه العملية, بحيث نحصل من كل تحويل على شجرة لها أضلاع مشتركة زيادة على سابقتها مع الشجرة T. واضح أنه بعد عدة تحويلات متتابعة لاتزيد على $p - 1$ تحويل نحصل على الشجرة T. بما أنه في كل تحويل نحصل على شجرة قياسها لايزيد على قياس الشجرة السابقة لها, فإننا نستنتج

$$W(T) \leq W(T').$$

بما أن 'T شجرة كيفية مولدة للبيان G, فإن W(T) أصغر مايمكن وبالتالي T هي شجرة قياس صغرى للبيان G.□

مثال (3-3): جد الشجرة المولدة الصغرى للبيان الموضح بالشكل (3-4), وذلك باستخدام خوارزمية كروسكال.



الشكل (3-4)

الحل: لإيجاد شجرة القياس الصغرى للبيان المعطى نتبع الخطوات التالية، حيث $p = 8$.

1. $i \leftarrow 1$ و $T \leftarrow \varnothing$.

2. نختار الضلع $e = (v_3, v_7)$, له وزن أصغري. نلاحظ أن $(v_3, v_7) \notin T$ و $T \cup \{(v_3, v_7)\}$ لايحتوي على حلقة, عندئذٍ نضع $e_1 \leftarrow (v_3, v_7)$ و $T \leftarrow T \cup \{e_1\}$.

3. $i = 1 \neq p - 1 = 7$، عندئذٍ $i \leftarrow i + 1 = 2$ وأذهب إلى 2.

---

2. نختار الضلع $e = (v_1, v_8)$, له وزن أصغري. نلاحظ أن $(v_1, v_8) \notin T$ و $T \cup \{(v_1, v_8)\}$ لايحتوي على حلقة, عندئذٍ نضع $e_2 \leftarrow (v_1, v_8)$ و $T \leftarrow T \cup \{e_2\}$.

3. $i = 2 \neq p - 1 = 7$، عندئذٍ $i \leftarrow i + 1 = 3$ وأذهب إلى 2.

---

2. نختار الضلع $e = (v_4, v_6)$, له وزن أصغري. نلاحظ أن $(v_4, v_6) \notin T$ و $T \cup \{(v_4, v_6)\}$ لايحتوي على حلقة, عندئذٍ نضع $e_3 \leftarrow (v_4, v_6)$ و $T \leftarrow T \cup \{e_3\}$.

3. $i = 3 \neq p - 1 = 7$، عندئذٍ $i \leftarrow i + 1 = 4$ وأذهب إلى 2.

---

2. نختار الضلع (v_2, v_8) = e, له وزن أصغري. نلاحظ أن $(v_2, v_8) \notin T$ و $T \cup \{(v_2, v_8)\}$ لايحتوي على حلقة, عندئذٍ نضع $e_4 \leftarrow (v_2, v_8)$ و $T \leftarrow T \cup \{e_4\}$.

3. $i = 4 \neq p - 1 = 7$، عندئذٍ $i \leftarrow i + 1 = 5$ وأذهب إلى 2.

---

2. نختار الضلع (v_1, v_2) = e, له وزن أصغري. نلاحظ أن $(v_1, v_2) \notin T$, لكن $T \cup \{(v_1, v_2)\}$ يحتوي على حلقة وبالتالي اختيار الضلع (v_1, v_2) مرفوض.

3. $i = 4 \neq p - 1 = 7$، عندئذٍ $i \leftarrow i + 1 = 5$ وأذهب إلى 2.

---

2. نختار الضلع (v_2, v_7) = e, له وزن أصغري. نلاحظ أن $(v_2, v_7) \notin T$ و $T \cup \{(v_2, v_7)\}$ لايحتوي على حلقة, عندئذٍ نضع $e_5 \leftarrow (v_2, v_7)$ و $T \leftarrow T \cup \{e_5\}$.

3. $i = 5 \neq p - 1 = 7$، عندئذٍ $i \leftarrow i + 1 = 6$ وأذهب إلى 2.

---

2. نختار الضلع (v_5, v_6) = e, له وزن أصغري. نلاحظ أن $(v_5, v_6) \notin T$ و $T \cup \{(v_5, v_6)\}$ لايحتوي على حلقة, عندئذٍ نضع $e_6 \leftarrow (v_5, v_6)$ و $T \leftarrow T \cup \{e_6\}$.

3. $i = 6 \neq p - 1 = 7$، عندئذٍ $i \leftarrow i + 1 = 7$ وأذهب إلى 2.

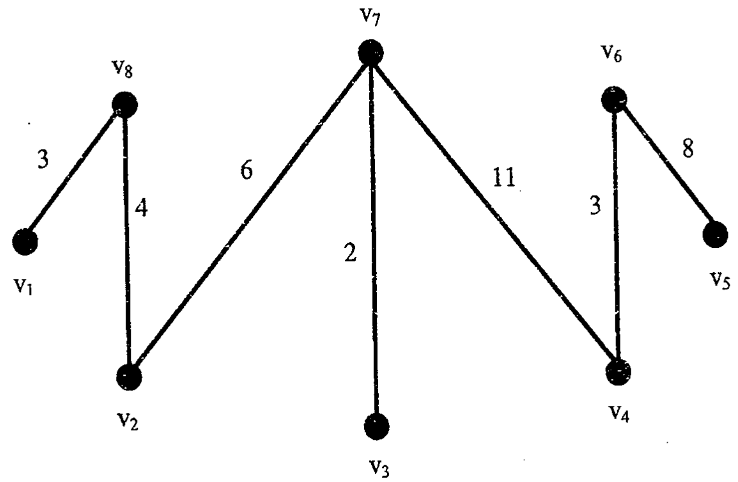
---

2. نختار الضلع $e = (v_4, v_7)$, له وزن أصغري. نلاحظ أن $(v_4, v_7) \notin T$ و $T \cup \{(v_4, v_7)\}$ لايحتوي على حلقة, عندئذٍ نضع $e_7 \leftarrow (v_4, v_7)$ و $T \leftarrow T \cup \{e_7\}$.

3. $i = 7 = p - 1 = 7$، عندئذٍ توقف.

وتكون شجرة القياس الصغرى للبيان $G(V, E)$, كما في الشكل (3-5) وقياسها

$$W(T) = \sum_{i=1}^{7} e_i = 37 \, .$$



الشكل (3-5)

(4-3) الأشجار وعلوم الحاسب (Trees and Computer Science).

للأشجار استخدامات كثيرة في علوم الحاسوب ومن ذلك أهميتها لتمثيل المعطيات. يمكن للأشجار أن تصف العلاقة بين أنواع من المعلومات، حيث يلاحظ سهولة التعامل معها ومعالجتها من خلال تمثيلها على الأشجار.

(1.4-3) الأشجار الثنائية (Binary Trees).

للأشجار الثنائية أهمية كبيرة في تمثيل وتحليل المعطيات (data) والتي تستخدم في الدراسات الحاسوبية ولاسيما دراسة تعقيد وتحليل الخوارزميات.

تنقسم الشجرة الثنائية إلى مستويات بحيث يتوضع رأس واحد في المستوى 0 يدعى جذر الشجرة (root) ونرمز له بـ r. في المستوى 1 نجد رأسين, رأس على يمين الجذر ويدعى الابن الأيمن للجذر (right child) ورأس أخر على يسار الجذر ويدعى الابن الأيسر للجذر (left child). عندما يكون للجذر أبناء فهو أب لهما (father) بالطبع هناك ضلع بين الأب وكل من الأبناء فقط. يمكن أن يكون لكل أب ولدان على الأكثر (يميني ويساري) ويصبح عندئذٍ أب, أي للابن اليميني ولدان يميني ويساري وكذلك للابن اليساري ويحتلون المستوى رقم 2 وهم أحفاد للجذر r . وهكذا دواليك يمكن أن يكون لك أبن أولاد بنفس الطريقة السابقة. ويجب ملاحظة أنه يمكن أن يكون لأي أب ولد واحد يميني أو يساري ولا يمنع أن يكون للابن الوحيد ولدان.

نلاحظ أنه على الأكثر

في المستوى 0 يكون عدد الرؤوس 1.

في المستوى 1 يكون عدد الرؤوس 2.

في المستوى 2 يكون عدد الرؤوس 4.

ومنه نستنتج على الأكثر

في المستوى k يكون عدد الرؤوس 2^k.

تدعى الشجرة الجزئية المكونة من الابن الأيسر للجذر وما يتبعه, بالشجرة الجزئية اليسرى وحيث الابن الأيسر يكون جذرها. كذلك تدعى الشجرة الجزئية المكونة من الابن الأيمن للجذر وما يتبعه, بالشجرة الجزئية اليمنى وحيث الابن الأيمن يكون جذرها. نرمز للشجرة الثنائية بالرمز $T(r, T_1, T_2)$ حيث جذرها r, T_1 الشجرة الجزئية اليسارية و T_2 الشجرة الجزئية اليمنى. إذا كان كل رأس في الشجرة الثنائية له ولدان أو لايملك أولاد نهائياً, عندئذٍ تدعى الشجرة بشجرة ثنائية كاملة. الرأس الذي له أولاد يدعى برأس داخلي وتكون درجته أكبر من 1, والرأس الذي ليس له أولاد يدعى برأس خارجي أو أحيانا بورقة (leaf) وتكون درجته تساوي 1. نقول عن رأسين إنهما شقيقان إذا كان لهما نفس الأب.

مثال (3-4): في الشكل (3-5) نلاحظ الشجرة الثنائية T. حيث

الجذر v_1, الابن الأيسر v_2، الابن الأيمن v_3.

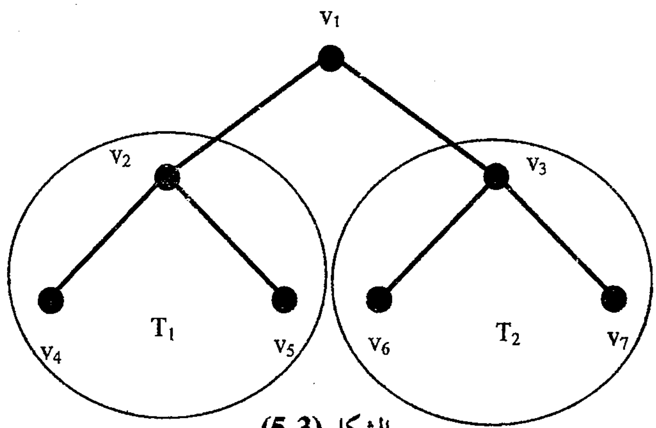
أبناء v_2 تكون v_4 و v_5, الأيسر والأيمن على الترتيب.

أبناء v_3 تكون v_6 و v_7, الأيسر والأيمن على الترتيب.

الرؤوس الداخلية للشجرة هي v_2, v_3.

الرؤوس الخارجية (الأوراق) للشجرة هي v_4, v_5, v_6, v_7.

الشجرة الجزئية اليسرى T_1 لها الجذر v_2 والرؤوس v_4, v_5 أوراق فيها.
الشجرة الجزئية اليمنى T_2 لها الجذر v_3 والرؤوس v_6, v_7 أوراق فيها.
نلاحظ أن الشجرة الثنائية $T(v_1, T_1, T_2)$ شجرة كاملة.



الشكل (3-5)

من أهم العمليات على الأشجار الثنائية هي القياسات الحسابية المطبقة عليها والمستخدمة في حساب تعقيد الخوارزميات التي تستخدم هذه الأشجار لتمثيلها ونذكر بعض منها.

قياس شجرة T هو عدد رؤوسها ويكون $|V(T)|$ ويكون قياس الشجرة الخالية مساوياً للصفر أي $|V(T_0)| = 0$. يمكن أن نحصل على قياس الشجرة غير الخالية T بالشكل التالي:

$$|V(T)| = |V(r, T_1, T_2)| = 1 + |V(T_1)| + |V(T_2)|$$

حيث r جذرها و T_1 الشجرة الجزئية اليسرى و T_2 الشجرة الجزئية اليمنى.

ارتفاع رأس v، h(v) (أو بعد رأس عن الجذر) هو عدد الأضلاع التي تصل بين هذا الرأس وجذر الشجرة r وبناءً عليه يكون

$$h(r) = 0$$
$$h(v_j) = 1 + h(v_i)$$

حيث إن الرأس v_i يكون أباً للرأس v_j.

ارتفاع الشجرة الثنائية h(T), يكون أكبر ارتفاع لرأس في الشجرة أي

$$h(T) = \max \{h(v) : v \in V(T)\}.$$

عرض الشجرة الثنائية L(T), هو أكبر عدد للرؤوس في مستوى معين.

مسافة التجوال ضمن شجرة Lc(T), هو مجموع ارتفاعات رؤوسها أي أن

$$LC(T) = \sum_{v \in V(T)} h(v) .$$

مسافة التجوال الداخلي ضمن شجرة LCI(T), هو مجموع ارتفاعات رؤوسها الداخلية

$$LCI(T) = \sum_{v \in V(T) \, and \, d(x) > 1} h(v) .$$

مسافة التجوال الخارجي ضمن شجرة LCE(T), هو مجموع ارتفاعات رؤوسها الخارجية (الأوراق) أي ارتفاع الرؤوس التي درجتها تساوي 1.

$$LCE(T) = \sum_{v \in V(T) \, and \, d(x) = 1} h(v) .$$

من الشجرة الثنائية في الشكل (3-5) نلاحظ مايلي:

$$h(T) = 2, LC(T) = 10, LCI(T) = 2, LCE(T) = 8.$$

إن أبسط الأمثلة التطبيقية على الأشجار الثنائية هي تمثيل أعداد فيبوناتشي.

نعرف معادلة إيجاد أعداد فيبوناتشي (Fibonacci) بالشكل التالي:

- $F_0 = 0,$
- $F_1 = 1,$
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ ;\ n > 1,$

يمكننا تمثيل عملية إيجاد أعداد فيبوناتشي باستخدام الأشجار الثنائية، ليكن $n = 5$، عندئذٍ الشجرة الثنائية كما في الشكل (3-6).

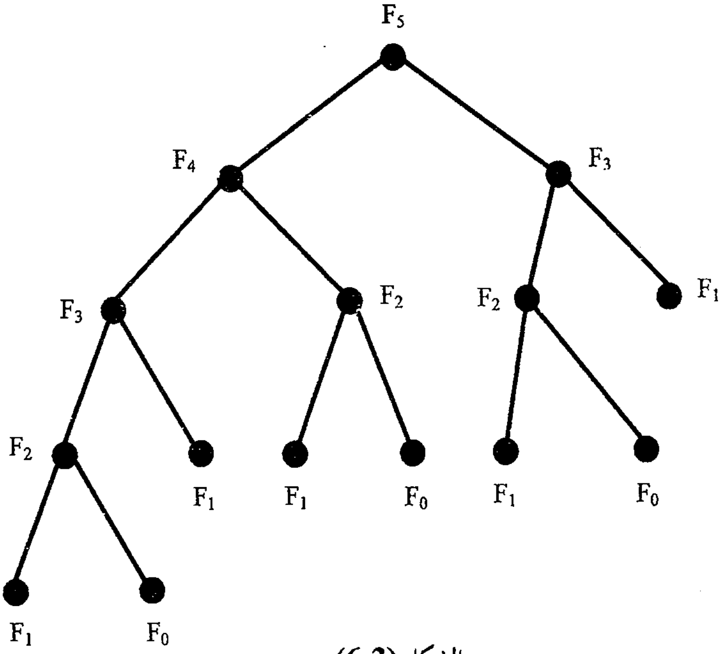
نلاحظ أن

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1,$$
$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2,$$
$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3,$$
$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5.$$

لحساب F_i $(2 \leq i \leq n)$ يلزم حساب F_{i-1} و F_{i-2}، بشرط أن تكون الأدلة أكبر أو تساوي الصفر.

تستخدم أعداد فيبوناتشي وطريقة تمثيلها على الأشجار الثنائية كمثال لدراسة الخوارزميات العودية وحساب تعقيدها ومن المعروف سهولة حساب تعقيد

الخوارزميات العودية باستخدام الأشجار الثنائية. نلاحظ أنه لحساب F_5, يلزم $2^{5-1} - 1 = 15$ استدعاء لـ F_i, وبشكل عام يلزم 2^{n-1} استدعاء لحساب F_n.



الشكل (6-3)

2.4-3) الأشجار وشفرات هوفمان (Trees and Huffman Codes).

أكثر الطرق استخداماً لتمثيل الرموز داخل الحاسوب هي استخدام سلاسل الرموز ثنائية الأرقام والثابتة الطول ومثال على ذلك, الشفرة القياسية الأمريكية لتبادل المعلومات Ascii, حيث كل رمز مؤلف من سبعة أرقام ثنائية هي 0, 1.

تختلف شفرة هوفمان عن شفرة Ascii, بأنها تستخدم تمثيل للرموز بسلاسل ثنائية الأرقام ومتغيرة الطول. وبحيث تمثل الرموز الأكثر استخداماً بسلاسل قصيرة الطول وتمثل الرموز الأقل استخداماً بسلاسل طويلة. بهذه الطريقة يكون تمثيل مجموعة سلاسل الرموز المستخدمة لتمثيل نص (text) أو برنامج (program) أو رموز رياضية, شاغلاً حيزاً أقل من استخدام تمثيلها بسلاسل وشفرات ثابتة الطول في شفرة Ascii. من الأمثلة العملية لاستخدام شفرة هوفمان, هي في جهاز تسجيل الفيديو كاست, حيث يستخدم شفرة هوفمان لتوليد أعداد يدخلها المستخدم ليتم اختيار أي من البرامج المراد تسجيلها.

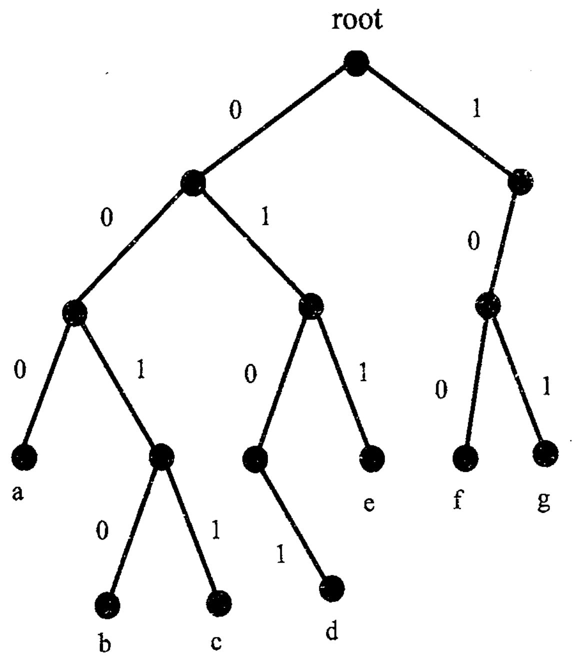
الشفرة الثنائية هي عبارة عن سلسلة من البتات عناصرها 0, 1 تدعى 0 bit و 1 bit وكل سلسلة تدعى كلمة شفرة (codeword).
يتم بناء شفرة هوفمان لمجموعة من الرموز, باستخدام الأشجار الثنائية. في البداية نرسم شجرة ثنائية بحيث تكون أوراقها ممثلة للرموز المعطاة (هذا يعني كل ورقة تعطي رمزاً مختلفاً). بعد ذلك نخص كل ضلع يذهب إلى ابن أيسر بـ 0 وكل ضلع يذهب إلى ابن أيمن بـ 1. عندئذٍ كل رمز يوافق كلمة الشفرة المكونة من سلسلة أضلاع المسار من الجذر إلى الورقة التي تخص الجذر.

مثال (3-5): لتكن الرسالة من الأحرف {a, b, c, d, e, f, g} حيث لها الشفرة الموضحة بالجدول التالي:

Letter	a	b	c	d	e	f	G
Codeword	000	0010	0011	0101	011	100	101

جدول (3-1)

نمثل هذه الرسالة باستخدام الشجرة الثنائية, حيث كل حرف يمثل بمسار ينطلق من الجزر إلى الورقة التي تمثل الحرف, وكل ضلع يتجه لليسار يحمل 0(bit) وكل ضلع يتجه لليمين يحمل 1(bit), لاحظ الشكل (3-7).



الشكل (3-7)

لتكن $L = \{s_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ قائمة الرموز (الأحرف) في نص معين. و f_i عدد مرات تكرار (frequently) ظهور الرمز s_i في النص. ليكن طول الرمز $len(s_i)$ من الـــ بتات (bits). عندئذٍ طول النص يعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i len(s_i) .$$

طول الكلمة يمكن أن يكون ثابتاً أو متغيراً، لكن طول الأحرف عادةً يكون ثابتاً في التمثيل الثنائي. إذا استعضنا عن طول (وزن) الرمز $len(s_i)$ بطولها الممثل ثنائياً w_i حيث $i = 1, 2, \ldots, n$ (أي طول المسار من الجذر إلى الورقة التي تحمل الرمز)، عندئذٍ متوسط طول (وزن) النص يكون

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \, w_i \, .$$

نهدف من ذلك الوصول إلى أفضل طريقة لتمثيل تكرار الرموز في القائمة L بأقصر تمثيل.

مثال (3-6): لنفرض أن تكرار كل رمز من في المثال (3-5)، يعطى بالجدول التالي:

Letter	a	b	c	d	e	f	G
Frequency	0.2	0.05	0.1	0.1	0.25	0.15	0.15

جدول (3-2)

عندئذٍ متوسط طول (وزن) الشفرة المعطاة في المثال (3-5)، تكون

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \, w_i = 3(0.2) + 4(0.05) + 4(0.1) + 4(0.1) + 3(0.25) + 3(0.15) + 3(0.15) = 3.25$$

الخوارزمية التالية لهوفمان والتي تقدم لنا كيفية الحصول على شفرة مصدرية مثلى لمجموعة رموز (نص text) باستخدام الأشجار الثنائية.

خوارزمية هوفمان (3-2) لبناء شفرة مصدرية (Huffman Algorithm):

المعطيات: مجموعة من الرموز $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ وأطوالها (أوزانها) على الترتيب $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$.

المخرجات: شجرة ثنائية تمثل الشفرة المصدرية للرموز مع عبارة شفرة لها أقل متوسط للطول (للوزن).

خطوات الخوارزمية:

1- في البداية, ضع غابة F من رؤوس معزولة $s_1, s_2, \ldots, s_n$ مع الأوزان $w_1, w_2, \ldots, w_n$.

2 - من $i = 1$ إلى $n - 1$, أكرر.

1.2- اختر من F شجرتين T_1, T_2 بأقل وزن من F.

2.2- ابنِ شجرة ثنائية جديدة, بحيث يكون لجذرها, T_1 شجرة جزئية يسرى و T_2 شجرة جزئية يمنى على التوالي.

3.2- ضع وزن 0 على الضلع المضاف إلى T_1, ووزن 1 على الضلع المضاف إلى T_2.

4.2- أعطِ للشجرة الجديدة الوزن $w(T_1) + w(T_2)$.

5.2- استبدل الأشجار T_1, T_2 في الغابة F, بشجرة جديدة T.

3 - عندما تصبح F شجرة (غابة مكونة من شجرة وحيدة), تكن الشجرة

الثنائية المطلوبة هي T.

الشجرة المبنية في الخوارزمية (3-2), تسمى شجرة هوفمان من أجل قائمة من الرموز وهي توافق الشفرة المصدرية لشفرة هوفمان.

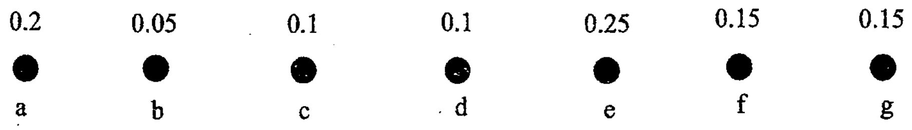
مثال (3-7): استخدم خوارزمية هوفمان للحصول شفرة مصدرية مثالية وذلك للرموز المرفقة مع نسبة تكرارها في الجدول التالي:

Letter	a	b	c	d	e	f	G
Frequency	0.2	0.05	0.1	0.1	0.25	0.15	0.15

جدول (3-3)

الحل:

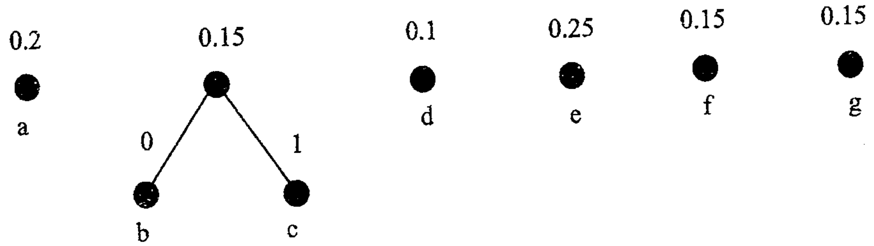
<u>**الخطوة 1**</u>: نضع الغابة المكونة من الرؤوس فقط مع أوزانها (نسب تكرارها).



<u>**الخطوة 2**</u>: من $i = 1$ إلى $i = n - 1$ كرر.

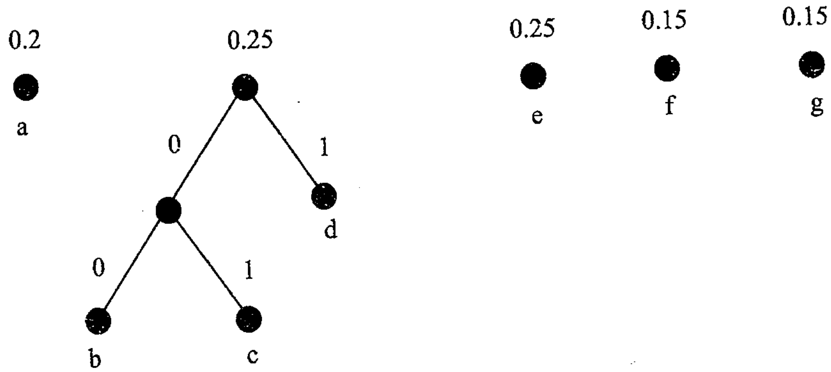
<u>**الخطوة 1.2**</u>: نلاحظ أن الرمزين (الرأسين, الشجرتين) b, c لهما أقل وزن, عندئذٍ $T_1 = b$ و $T_2 = c$ و يتحدان في شجرة واحدة T, بحيث يكون

$$w(T) = w(T_1) + w(T_2) = 0.05 + 0.1 = 0.15$$



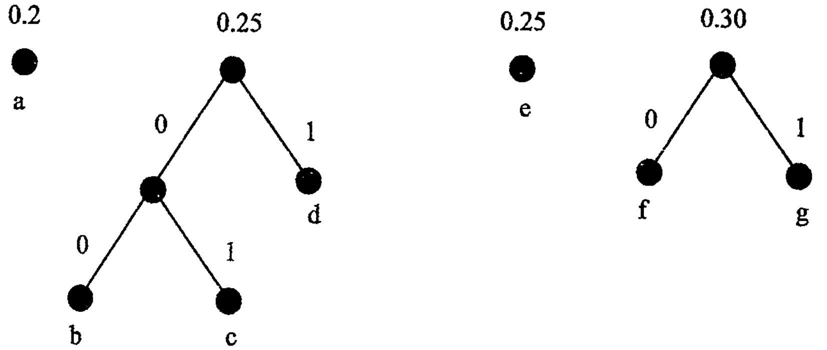
الخطوة 2.2: نلاحظ أن الرمزين (الرأسين, الشجرتين) T, d لهما أقل وزن, عندئذٍ $T_1 = T$ و $T_2 = d$ و يتحدان في شجرة واحدة T, بحيث يكون

$$w(T) = w(T_1) + w(T_2) = 0.15 + 0.1 = 0.25$$



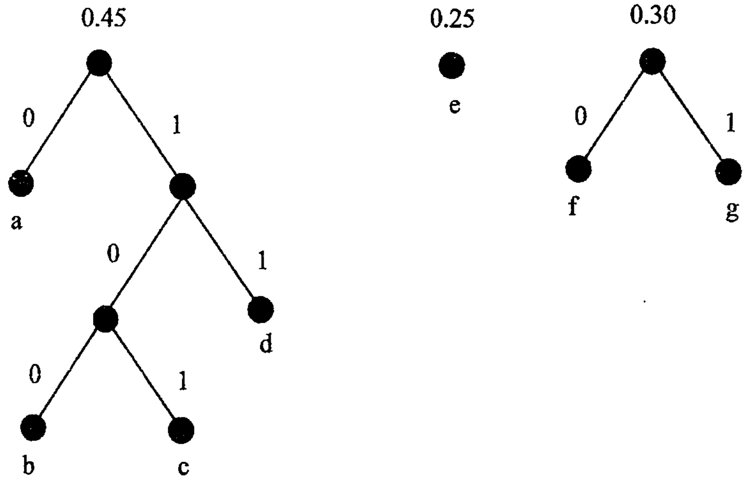
الخطوة 3.2: نلاحظ أن الرمزين (الرأسين, الشجرتين) f, g لهما أقل وزن, عندئذٍ $T_1 = f$ و $T_2 = g$ و يتحدان في شجرة واحدة T, بحيث يكون

$$w(T) = w(T_1) + w(T_2) = = 0.15 + 0.15 = 0.30$$



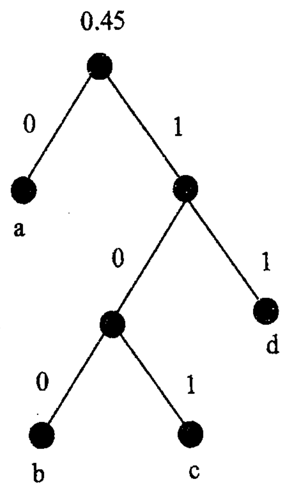
الخطوة 4.2: نلاحظ أن الرمزين (الرأسين, الشجرتين) {a, {b, c, d لهما أقل وزن, عندئذٍ $T_1 = a$ و $T_2 = \{b, c, d\}$ و يتحدان في شجرة واحدة T, ويكون

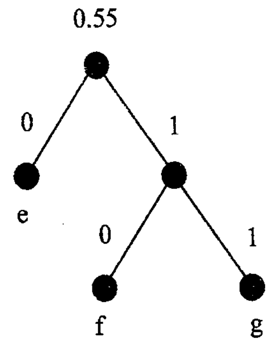
$$w(T) = w(T_1) + w(T_2) = = 0.25 + 0.2 = 0.45$$



الخطوة 5.2: نلاحظ أن الرمزين (الرأسين, الشجرتين) {a, {b, c, d لهما أقل وزن, عندئذٍ $T_1 = e$ و $T_2 = \{f, g\}$ و يتحدان في شجرة واحدة T, ويكون

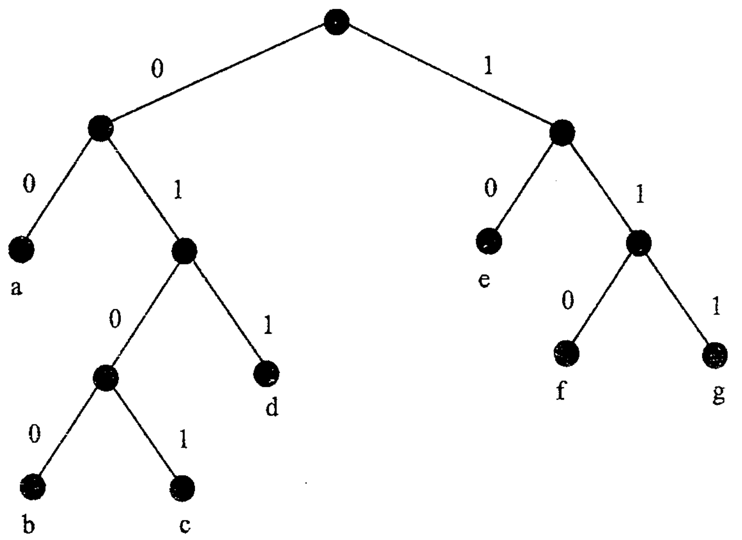
$$w(T) = w(T_1) + w(T_2) = = 0.25 + 0.30 = 0.55$$





الخطوة 6.2: نلاحظ أن الرمزين (الرأسين, الشجرتين) {a, b,c, d}, {e,f, g} لهما أقل وزن, عندئذٍ {a, b, c, d} = T_1 و {e, f, g} = T_2 و يتحدان في شجرة واحدة T, ويكون

$$w(T) = w(T_1) + w(T_2) = = 0.45 + 0.55 = 1$$



شجرة هوفمان الناتجة عن جدول التكرار.

<u>الخطوة 3</u>: نلاحظ أن $n = 7$ و $i = n - 1 = 7 - 1 = 6$. عندئذٍ شجرة هوفمان تكون الشجرة الناتجة في الخطوة (6.2) وهي الموافقة للجدول التكرار (3, 3).

وبتحليل الشفرة الموافقة لشجرة هوفمان نحصل على الجدول التالي:

Letter	a	b	c	d	e	f	G
Codeword	00	0100	0101	011	10	110	111

الجدول (3-4)

ملاحظة: إذا حسبنا متوسط طول (النص) عبارة الشفرة المصدرية الناتجة نجد أن

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\, w_i = 2(0.2) + 4(0.05) + 4(0.1) + 3(0.1) +$$

$$2(0.25) + 3(0.15) + 3(0.15) = 2.7$$

نرى أن متوسط طول (وزن) الشفرة المصدرية هو أقل من متوسط طول (وزن) الشفر المصدرية لنفس الجدول التكراري للأوزان في المثال (6-3) وهذا ناتج عن إمكانية اختيار البداية في تكوين شجرة هوفمان وكذلك عند الاختيار بين رمزين (رأسين, شجرتين) لهما نفس التكرار. على سبيل المثل في الخطوة (2-2) يمكن اختيار تكوين شجرة من الرأس d مع الرأس f أو الرأس g بدل اختيار شجرة من الشجرة الناتجة من الخطوة (1-2) مع الرأس d. وكل الاختيارات صحيحة لأنها تعتمد على اختيار الوزن الأصغر. في كل الأحوال الشجرة الناتجة تكون شجرة هوفمان المثلى. سوف نعتمد الاختيار لأقل الأوزان من اليسار.

(5-3) الأشجار الموجهة (Directed Trees).

كما للأشجار غير الموجهة أهميتها التطبيقية في كثير من فروع العلم بالإضافة للحياة العملية. فإن للأشجار الموجهة أهمية إضافية لكونها تحدد الاتجاه والمسار المطلوب بدقة أكثر. ولاسيما أننا نعلم أن أي عمل يتطلب تحديد خطوات متتالية لإنجازه وتحديد اتجاه الخطوة التالية للخطوة السابقة.

الشجرة الموجهة (directed tree) T(V, A), لها رأس متميز يسمى جذر r (root), بحيث لأجل أي رأس $v \in V(T)$ يوجد مسار موجه من الجذر r إلى v. بمعنى أخر يمكن الوصول بمسار من الجذر r إلى أي رأس $v \in V(T)$. هناك عدة ميزات تصف الشجرة الموجهة نجملها بالمبرهنة التالية:

مبرهنة (6-3): (Gould, 1988) ليكن D(V, A) بياناً موجهاً, عندئذٍ تكون الشروط التالية متكافئة:

1. البيان الموجه T, شجرة موجهة.
2. البيان الموجه T, له جذر r ولكل رأس $v\in V$, يوجد مسار موجه وحيد r-v في T.
3. البيان الموجه T, له جذر r بحيث $id(r) = 0$ ولكل رأس $r \neq v\in V$, $id(v) = 1$.
4. البيان الموجه T له جذر r, ولكل رأس أخر $r \neq v\in V$, هناك مسار r-v وكل قوس في T يكون جسراً.
5. البيان T مترابط, ويحتوي رأساً r بحيث $id(r) = 0$, ولكل رأس أخر $r \neq v\in V$ يكون $id(v) = 1$.

البرهان: بشكل مشابه لبرهان المبرهنة (1-3), لذلك نترك للطالب كتمرين.

يكون البيان الجزئي T شجرة موجهة مولدة للبيان الموجه D(V, A), إذا كان T شجرة موجهة بحيث $V(T) = V(D)$ ولكل قوس $e\in A(T)$ يكون $e\in A(D)$. لمعرفة عدد الأشجار المولدة للبيان الموجه D, نحتاج لتعريف مصفوفة الدرجة الداخلية للبيان الموجه.

ليكن D(p, q) بياناً موجهاً, وليكن m عدد الأقواس الموجهة من الرأس j إلى الرأس k, عندئذٍ نعرف مصفوفة الدرجة الداخلية (indegree matrix) للبيان D من القياس $p\times p$ بالشكل $A_i(D) = A_i = [d_{j\,k}]$, حيث

$$d_{jk}=\begin{cases} idj & if \quad j=k \\ -m & if \quad j\neq k. \end{cases}$$

سوف نقدم المبرهنة التالية والتي نقبلها بدون برهان.

مبرهنة (3-7): (Gould, 1988) البيان الموجه $D(V, A)$, يكون شجرة موجهة, إذا وفقط إذا كان لمصفوفة الدرجة الداخلية $A_i(D) = [d_{j\,k}]$, الخواص التالية:

1. $d_{j\,j} = 0$ عندما $j = r$, $d_{j\,j} = 1$ عندما $j \neq r$.

2. محدد المرافق الجبري لموقع عنصر الجزر (r, r) في $A_i(D)$, له القيمة 1.

نتيجة (3-4): ليكن D بياناً موجهاً, له مصفوفة الدرجة الداخلية A_i. إذا $|A_i| = 0$ عندئذٍ D ليس شجرة موجهة.

مبرهنة (3-8): عدد الأشجار الموجهة ذات الجذر r, والمولدة للبيان الموجه D, يساوي قيمة المحدد الجبري لموقع عنصر الجذر للمصفوفة $A_i(D)$, (أي قيمة محدد المصفوفة $A_i(D)$ بعد حذف سطر وعمود الرأس r (الجذر)).

البرهان: ليكن D_G البيان الموجه الناتج من البيان غير الموجه G وذلك باستبدال كل ضلع $e = uv\in G$ بقوسين باتجاهين مختلفين uv, vu. ليكن $v\in V(D_G)$ (كذلك $v\in V(G)$), عندئذٍ يوجد تقابل واحد لواحد بين مجموعة الأشجار المولدة للبيان G ومجموعة الأشجار الموجهة ذات الجذر r والمولدة للبيان D_G. ولإثبات ذلك, نفرض T شجرة مولدة للبيان G ولنفرض أن $e = uv\in E(T)$. لتكن T^*

شجرة موجهة بالجذر r, نحصل عليها من T بالشكل, بوضع e

$= uv \in E(T^*)$ إذا كان $d_T(u, r) < d_T(v, r)$

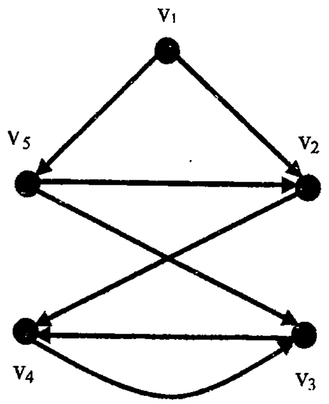
و $e = vu \in E(T^*)$ إذا كان $d_T(u, r) \geq d_T(v, r)$

عندئذٍ لأجل كل شجرة T مولدة للبيان G, نحصل على شجرة موجهة متمايزة T^* مولدة للبيان D_G.

العكس: لتكن لدينا T^* ذات الجذر r, عندئذٍ بتجاهل الاتجاهات على الأقواس نحصل على شجرة T مولدة للبيان T.

نتيجة (3-5): المبرهنتين (3-4) و (3-7) تنتجان نفس المصفوفة, أي أن $\Lambda(G)$ $= A_i(D_G)$, حيث D_G هو البيان الموجه الناتج من البيان الغير G بالمبرهنة (3-7).

مثال (3-8): جد عدد الأشجار الموجهة ذات الجذر v_1 والمولدة للبيان الموجه D الموضح في الشكل (3-8).



الشكل (3-8)

الحل: نوجد مصفوفة الدرجة الداخلية A_i

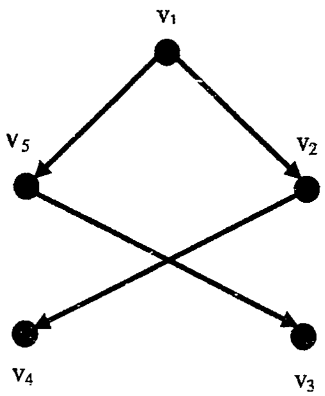
$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

عندئذٍ عدد الأشجار هو قيمة المحدد بعد حذف سطر وعمود الجذر.

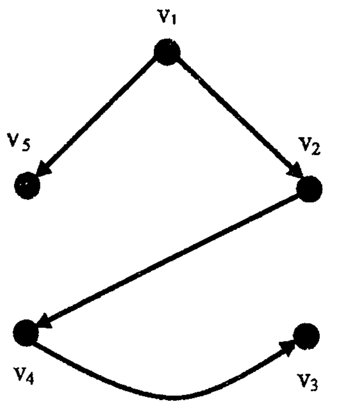
$$A_i = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي نجد أن $\det |A_i| = 6$.

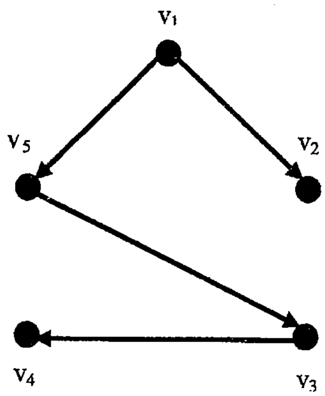
إذاً هناك 6 أشجار مولدة للبيان D وهي موضحة بالشكل التالي:



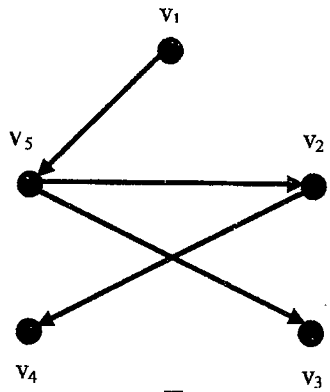
T_1



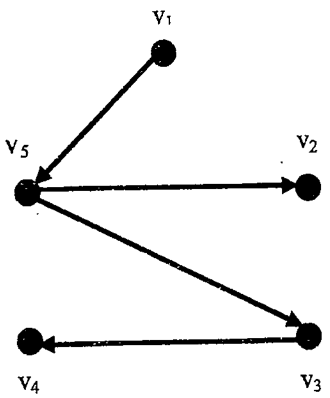
T_2



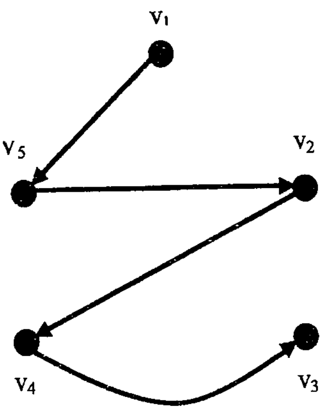
T_3



T_4



T_5



T_6

ليكن $D(V, A)$ بياناً موجهاً موزون الأقواس. سوف ندرس مسألة إيجاد أصغر شجرة موجهة جذرها v_0 بحيث تضم كل الرؤوس الممكن الوصول أليها من الرأس v_0 في البيان الموجه D. نسمي الشجرة الناتجة بشجرة القياس الأصغر العظمى (أي لها أصغر وزن (مسافة) بين الرأس v_0 وأي رأس أخر $v_i \in T$ حيث $i \neq 0$, وتضم أكبر عدد من الرؤوس الممكن الوصول أليها من الرأس الجذر v_0) أن عملية إيجاد شجرة القياس الأصغر العظمى, هي بالحقيقة ايجاد أقصر مسار موجه من الرأس v_0 إلى أي رأس أخر $v_i \neq v_0$, في البيان D.

البيان الموجه المترابط البسيط هو بيان يحقق الخاصة, إذا كان $uv \in A(D)$ عندئذٍ $vu \notin A(D)$.

نقبل المبرهنة التالية بدون برهان.

مبرهنة (3-9) (Gould, 1988): ليكن $D(V, A)$ بياناً موجهاً مترابطاً وبسيطاً و $v_0 \in V(D)$. ولتكن T شجرة جذرها v_0، بحيث تحتوي كل الرؤوس الممكن الوصول إليها من الرأس v_0. ليكن $L(u)$ قياس المسار الموجه من الرأس v_0 إلى الرأس u في T. وليكن $L(v_0) = 0$، عندئذٍ T هي شجرة القياس الأصغر العظمى نسبة للمصدر v_0 إذا وفقط إذا كان لأجل كل وتر (u, v) المتجه من u إلى v في T يكون

$$L(v) \le L(u) + L(u, v).$$

خوارزمية (3-3): إيجاد شجرة القياس الأصغر العظمى.

المعطيات: $D(V, A)$ بيان موجه بسيط مترابط وموزون و v_0 جذر.

المخرجات: شجرة القياس الأصغر العظمى $T(V, A(T))$.

الطريقة: إيجاد شجرة موجهة جذرها v_0 تضم كل الرؤوس الممكن الوصول إليها من الجذر v_0، ثم دراسة الأقواس الباقية والتي تصنع حلقة مع رؤوس T.

<u>خطوات الخوارزمية:</u>

1- اختر شجرة موجهة T_0 جذرها v_0 مع كل الرؤوس الممكن الوصول إليها بمسار موجه من v_0 ونرفق كل رأس $v_0 \ne v_i \in V(T)$ بطول المسار إليه من v_0، وليكن $L(v_i)$.

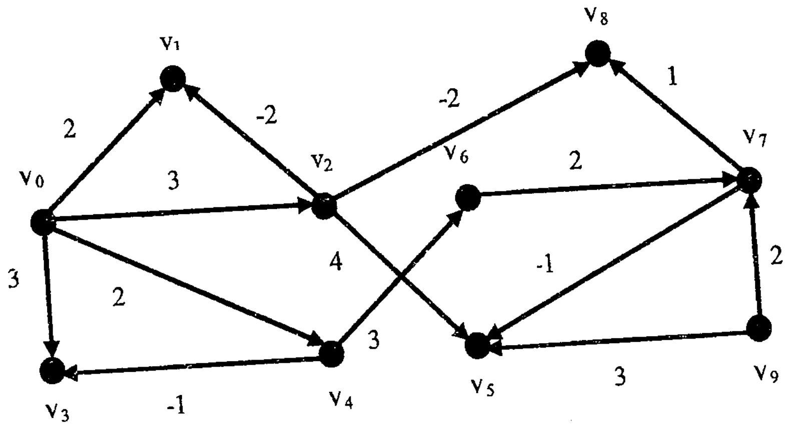
2- لأجل كل قوس $e \in A(D)$ و $e \notin A(T_i)$. ليكن $e = (v_k, v_j)$ وتر في حلقة (أي يصنع مساراً أخر إلى الرأس v_j). إذا كان العلاقة التالية محققة

$$L(v_j) \le L(v_k) + L(v_k, v_j)$$

نبقي الشجرة T_i على حالها, وإلا نحذف من الشجرة T_i أخر قوس يصل إلى الرأس v_j وأضيف القوس $e = (v_k,v_j)$ ونحصل على الشجرة T_{i+1}.

3- هل هناك أوتار D, تصنع مساراً مختلفاً لأي رأس في T_{i+1}. إذا كان يوجد, عندئذٍ كرر الخطوة 2, وإلا تكون T_{i+1} هي شجرة القياس الأصغر العظمى.

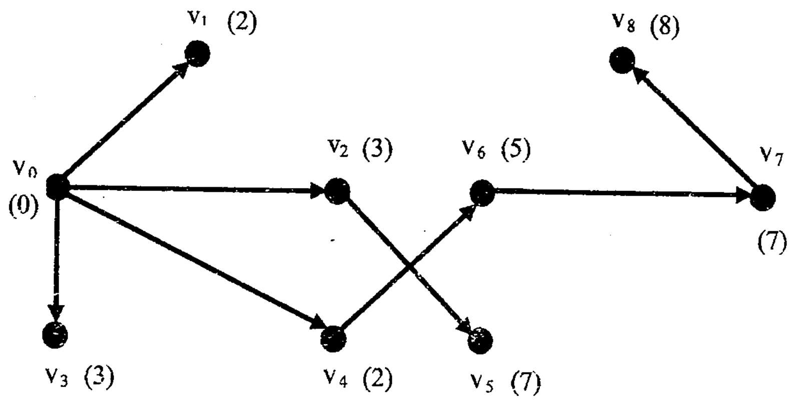
مثال (3-9): باستخدام الخوارزمية (3-3), جد شجرة القياس الأصغر العظمى والتي جذرها v_0, للبيان الموجه الموزون D, الموضح في الشكل (3-9).



الشكل (3-9)

الحل: لإيجاد شجرة القياس الأصغر العظمى للبيان الموجه المعطى نتبع الخطوات التالية:

1. نختار الشجرة T_0 ذات الجذر v_0 مع كل الرؤوس الممكن الوصول إليها بمسار موجه من v_0 ونرفق كل رأس بطول (وزن) المسار إليه من الجذر، و T_0 موضحة بالشكل التالي:



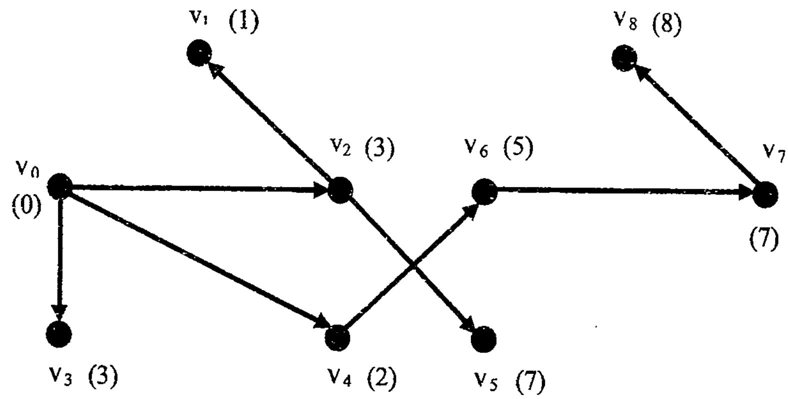
T_0

---

2. نلاحظ أن القوس $e = (v_2, v_1)$, هو وتر ويصنع مساراً آخر إلى الرأس v_1 في T_0, وحيث

$$L(v_1) = 2 \leq L(v_2) + L(v_2, v_1) = 3 - 2 = 1$$

غير محققة, عندئذٍ نحذف القوس $e = (v_0, v_1)$ من الشجرة T_0 ونضيف إليها القوس $e = (v_2, v_1)$ ونحصل على الشجرة T_1.



T_1

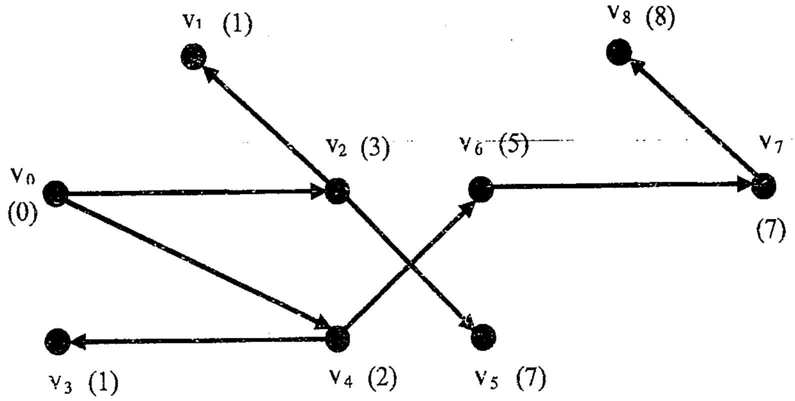
3- هل هناك أوتار للبيان D, تصنع مساراً مختلفاً لأي رأس في T_1. نعم, عندئذٍ كرر الخطوة 2.

----

2. نلاحظ أن القوس $e = (v_4, v_3)$, هو وتر ويصنع مساراً آخر إلى الرأس v_3 في T_1, وحيث

$$L(v_3) = 3 \leq L(v_4) + L(v_4, v_3) = 2 - 1 = 1$$

غير محققة, عندئذٍ نحذف القوس $e = (v_0, v_3)$ من الشجرة T_1 ونضيف إليها القوس $e = (v_4, v_3)$ ونحصل على الشجرة T_2.



T_2

3- هل هناك أوتار للبيان D, تصنع مساراً مختلفاً لأي رأس في T_2. نعم, عندئذٍ كرر الخطوة 2.

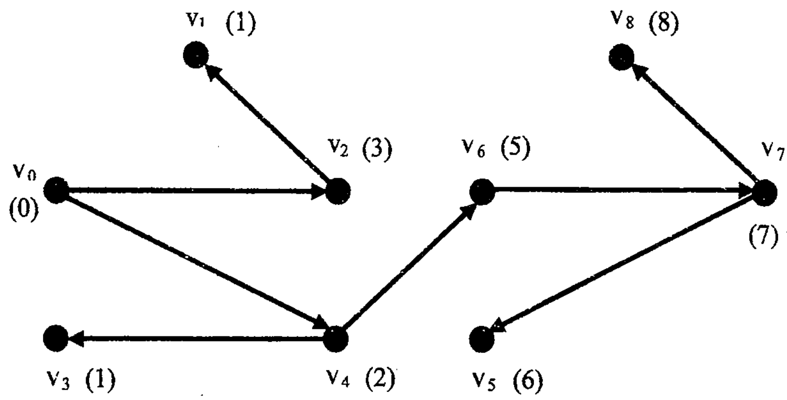
----

2. نلاحظ أن القوس $e = (v_7, v_5)$, هو وتر ويصنع مساراً آخر إلى الرأس v_5 في

T_2, وحيث

$$L(v_5) = 7 \leq L(v_7) + L(v_7, v_5) = 7 - 1 = 6$$

غير محققة, عندئذٍ نحذف القوس $e = (v_2, v_5)$ من الشجرة T_2 ونضيف إليها القوس $e = (v_7, v_5)$ ونحصل على الشجرة T_3.



T_3

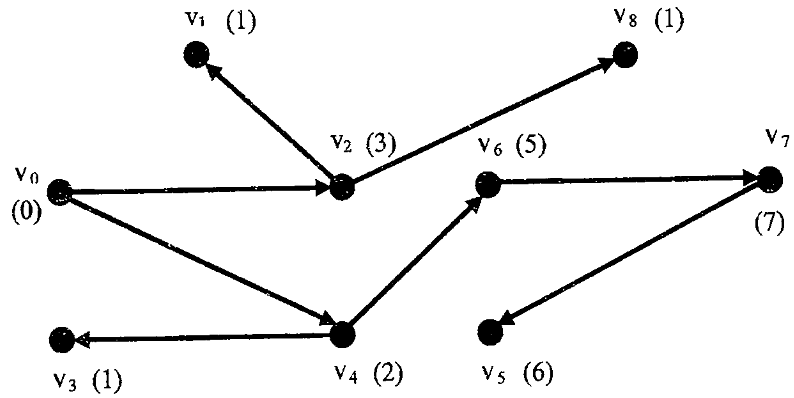
3- هل هناك أوتار للبيان D, تصنع مساراً مختلفاً لأي رأس في T_2. نعم, عندئذٍ كرر الخطوة 2.

---

2. نلاحظ أن القوس $e = (v_2, v_8)$, هو وتر ويصنع مساراً آخر إلى الرأس v_8 في T_3, وحيث

$$L(v_8) = 8 \leq L(v_2) + L(v_2, v_8) = 3 - 2 = 1$$

غير محققة, عندئذٍ نحذف القوس $e = (v_7, v_8)$ من الشجرة T_3 ونضيف إليها القوس $e = (v_2, v_8)$ ونحصل على الشجرة T_4.



T_4

-3 هل هناك أوتار للبيان D, تصنع مساراً مختلفاً لأي رأس في T_2. كلا, عندئذٍ توقف. وتكون T_4 شجرة القياس الأصغر العظمى للبيان D نسبة للجذر v_0.

تـمــــــــــاريــن:

1. أثبت النتيجة (3-1).

2. أثبت النتيجة (3-2).

3. أثبت المبرهنة (3-2).

4. برهن أنه إذا كانت T(V, E) شجرة, عندئذٍ لأجل أي ضلع $e\in E(T)$ يكون لـ T - e مركبتين فقط.

5. أثبت النتيجة (3-3).

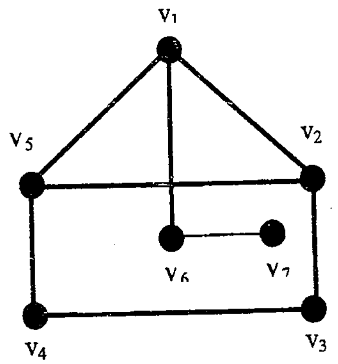
6. برهن أن أي بيان مترابط G(p, q), يحتوي على الأقل p – 1 ضلع.

7. لتكن T شجرة, برهن أن مركز T يحتوي رأساً أو رأسين متجاورين.

8. لتكن $S(d_1, d_2, \ldots, d_p)$ متتالية من الأعداد الصحيحة الموجبة. برهن أن S متتالية الدرجة لشجرة إذا وفقط إذا كان البيان مترابطاً و $\sum_{i=1}^{p} d_i = 2(p-1)$.

9. جد الأشجار غير المتطابقة والمولدة لكل من البيانين K(2, 2), K(3, 3) هل يمكن استنتاج دستور لحساب عدد الأشجار المولدة للبيان K(n, n).

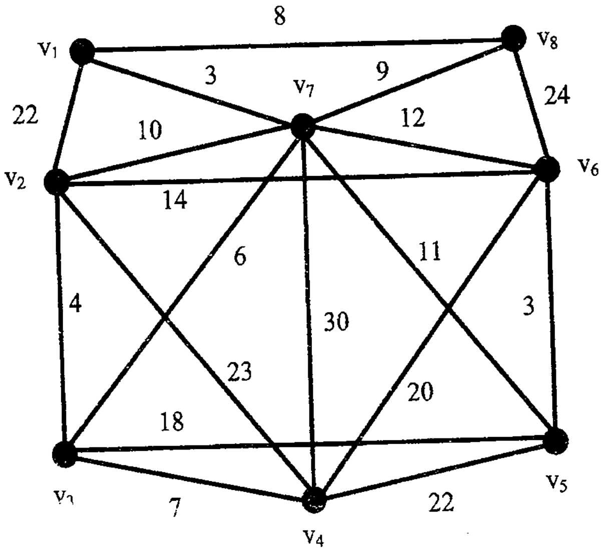
10. جد الأشجار غير المتطابقة والمولدة للبيان الموضح بالشكل. ماذا تستنتج بالمقارنة مع المثال مثال (3-2).



11. برهن أن البيان G لايحتوي حلقة, إذا وفقط إذا كان كل بيان جزئي محدث فيه يحتوي رأساً من الدرجة 1 على الأكثر.

12. أحسب زمن تعقيد خوارزمية كروسكال.

13. جد الشجرة المولدة الصغرى للبيان الموضح بالشكل, وذلك باستخدام خوارزمية كروسكال.



14. هل يمكن إيجاد الشجرة المولدة الصغرى لبيان بسيط غير موجه بطريقة حذف الضلع ذات القياس الأكبر في كل حلقة في البيان. طبق النتيجة على البيان في التمرين (13).

15. حاول أن تجد الشجرة المولدة العظمى للبيان الموضح في التمرين (13), وذلك باستخدام تعديل لخوارزمية كروسكال.

16. ارسم كل أنواع الأشجار الثنائية من الرتبة 3 و 4 وغير المتماثلة بموقع الجذر.

17. ارسم كل أنواع الأشجار الثنائية من الرتبة 5 وغير المتماثلة بموقع الجذر.

18. ارسم الأشجار الثنائية التالية. إذا لم تتمكن من ذلك, وضح السبب؟.

a. شجرة من الرتبة 12, وارتفاعها 4.

b. شجرة من الرتبة 12, وارتفاعها 5 مع 5 أوراق.

c. شجرة من الرتبة 14, وارتفاعها 3.

d. شجرة من الرتبة 14, وارتفاعها 4 مع 6 أوراق.

e. شجرة من الرتبة 14, وارتفاعها 3, بحيث إن لكل رأس داخلي 3 أبناء.

19. استخدم خوارزمية هوفمان للحصول على شفرة مصدرية مثالية وذلك للرموز المرفقة مع نسب تكرارها في الجدول التالي:

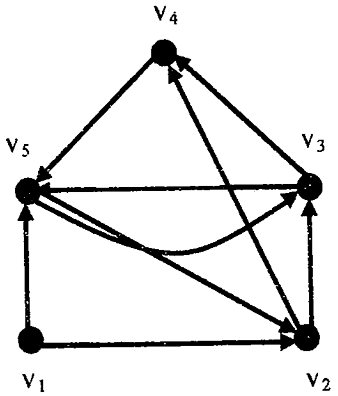
Letter	x	Y	z	a	b	c
Frequency	0.2	0.1	0.1	0.2	0.25	0.15

20. استخدم خوارزمية هوفمان للحصول على شفرة مصدرية مثالية واحسب متوسط طول عبارة الشفرة المصدرية الناتجة, وذلك للرموز المرفقة مع نسب تكرارها في الجدول التالي:

Letter	a	b	c	m	n	p	q	r
Frequency	0.15	0.2	0.1	0.1	0.2	0.05	0.05	0.15

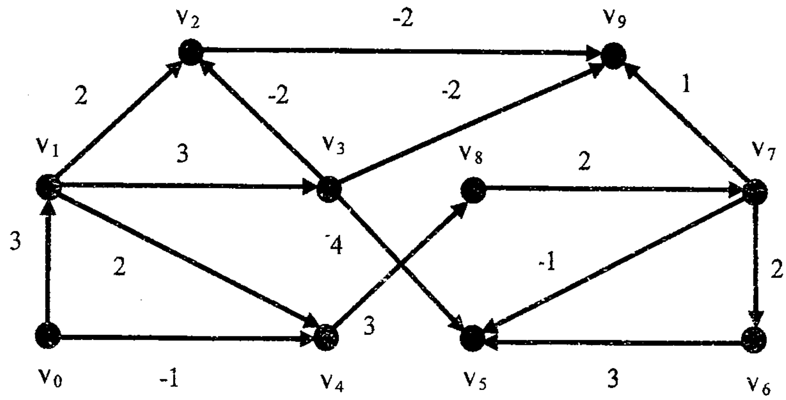
21. أثبت المبرهنة (3-6).

22. جد عدد الأشجار الموجهة ذات الجذر v_1 والمولدة للبيان الموجه D الموضح في الشكل التالي:



23. جد عدد الأشجار الموجهة ذات الجذر v_0 والمولدة للبيان الموجه D الموضح في الشكل (3-9), بعد حذف الرأس v_9.

24. باستخدام الخوارزمية (3-3), جد شجرة القياس الأصغر العظمى والتي جذرها v_0, للبيان الموجه الموزون D, الموضح في الشكل التالي:



25. أعد حل التمرين (24), باعتبار الجذر v_1.

الفصــل الــرابــع

تلــويــن البيــانــات

Graph Coloring

تُعد مسألة تلوين البيان من أقدم وأهم المشاكل في نظرية البيان. إن نشأة مشكلة التلوين تعود إلى عام 1852 وذلك عندما كتب دي مورغان (De Morgan) رسالة إلى صديقة وليم هاملتون (William Hamilton) يخبره فيها بأن أحد طلبته لاحظ مايلي:

عند تلوين الخريطة الإدارية لإنكلترا يكفي أربعة ألوان لتلوينها بحيث يُخصص لوناً لكل منطقة ولا تحتوي منطقتان متجاورتان لهما اللون نفسه. المشكلة تكون أكثر تعميماً عندما تصاغ بالشكل التالي: ماهو العدد الأقل من الألوان اللازمة لتلوين خريطة مستوية (حقيقية أو مفترضة) بحيث يخصص لون واحد لكل دولة ولا يكون لدولتين متجاورتين اللون نفسه. قدم (Cayley), للعلن هذه المشكلة عام (1878), وذلك من خلال جمعية الرياضيات اللندنية, متسائلاً فيما إذا كانت قد حلت أم لاتزال غير محلولة.

عرفت هذه المشكلة لاحقاً بمشكلة الألوان الأربعة Four Color Problem واختصارها (FCP). قدم (Kempe) في عام 1879, أول برهان منشور لحل (FCP) ولكن تبين لعالم الرياضيات هيوود (Heawood) أن برهان كمبي غير مكتمل وقدم مثالاً يبين عدم صحته بشكل عام, ومن ثم استخدم طريقته في البرهان

لإثبات أن كل خريطة قابلة للتلوين بـِ خمسة ألوان. بعد ذلك مضت سنوات عديدة ومسألة الألوان الأربعة بدون برهان مكتمل وعندئذٍ تبين للعلماء أن المشكلة أعمق مما يتوقعون. في عام 1976, قدم أبيل وهيكن (Appel and Haken) برهاناً صحيحاً لها ولكن كان برهاناً طويلاً يتكون من 200 صفحة و 700 صفحة عمل مساعد واستغرقت العمليات الحسابية 1200 ساعة على الحاسوب.

في 1997, أوضح سيمور ورابتسن و ... (Seymour, Robertson and et...) إنه يمكن إثبات (FCP) باستخدام أقل للحاسوب في تفاصيل البرهان المطول والذي مازال علماء الرياضيات يعملون لإيجاد برهان أبسط وأقصر من البرهان المقدم من أبيل وهيكن.

في هذا الفصل سنستعرض تلوين البيان بمختلف مكوناته ومنها الرؤوس, والأضلاع والأوجه (المناطق) بالإضافة إلى كثيرات حدود التلوين.

(1-4) تلوين الرؤوس (Vertex-Coloring).

ليكن $G(V, E)$ بياناً بسيطاً مترابطاً لايحتوي على لفات أو أضلاع مضاعفة. نقول إن البيان G قابل للتلوين بـِ k-لون للرؤوس إذا تمكنا من تلوين رؤوسه بـِ k لون من الألوان المختلفة بحيث لايحتوي رأسين متجاورين لهما اللون نفسه. نقول عن مجموعة من رؤوس البيان إنها مجموعة مستقلة إذا كانت لاتحتوي رأسين متجاورين. عدد أكبر مجموعة مستقلة من رؤوس البيان يسمى عدد الاستقلال ونرمز له بـِ $\beta_0(G)$. يمكننا الآن صياغة تعريف تلوين البيان بطريقة أخرى, لتكن $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ مجموعة رؤوس البيان G,

نقول إن G قابل للتلوين بـ k-لون للرؤوس إذا تمكنا من تجزئة المجموعة $V(G)$ إلى k مجموعة جزئية $V_1, V_2, \dots, V_k$ غير الخالية والمنفصلة مثنى مثنى وأن يكون $V(G)=\bigcup_{i=1}^{k} V_i$ وبحيث لاتحتوي أي مجموعة جزئية $V_i\ (i = 1, 2, .., k)$ على رأسين متجاورين. بمعنى أخر رؤوس كل مجموعة جزئية $V_i\ (i = 1, 2, \dots, k)$ مستقلة فيما بينها. إذا كان البيان $G(V, E)$ قابلاً للتلوين بـ k-لون من الألوان المختلفة وغير قابل للتلوين بـ $(k-1)$-لون، عندئذٍ نقول إن للبيان G، k-عدداً لونياً (k-chromatic number) نرمز له $\chi(G)$.

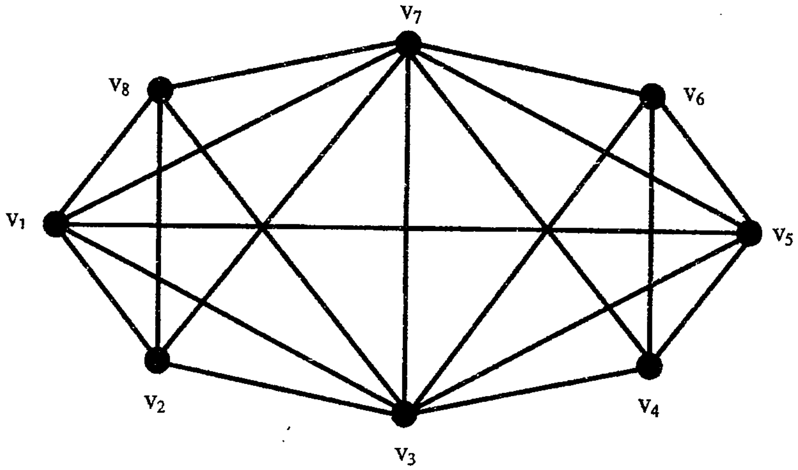
سوف نعتبر أن الألوان عبارة عن أعداد صحيحة موجبة، أي تكون الألوان مختلفة باختلاف الأعداد الموافقة لها ومثال على ذلك إذا كان لرؤوس البيان G الألوان التالية: الأخضر، الأحمر والأبيض، عندئذٍ يمكننا أن نعبر عن ذلك بمجموعة الأعداد $\{1, 2, 3\}$، حيث اللون الأخضر يقابله العدد 1، اللون الأحمر يقابله العدد 2 واللون الأبيض يقابله العدد 3.

مثال (4-1).

$$\chi(K_n) = n,\ \chi(K_{(m,n)}) = 2,\ \chi(P_n) = 2,\ \chi(T) = 2,$$

$$\chi(C_n) = 2 : n \equiv 0 \pmod 2,\ \chi(C_n) = 3 : n \equiv 1 \pmod 2.$$

مثال (4-2): جد عدد تلوين رؤوس البيان الموضح بالشكل (4-1).



الشكل (1-4)

ليكن ترتيب ألوان الرؤوس بالشكل التالي:

الرأس v_1 يأخذ اللون 1, الرأس v_2 يأخذ اللون 2, الرأس v_3 يأخذ اللون 3,

الرأس v_4 يأخذ اللون 1, الرأس v_5 يأخذ اللون 2, الرأس v_6 يأخذ اللون 4,

الرأس v_7 يأخذ اللون 5, الرأس v_8 يأخذ اللون 4.

نلاحظ أن $\chi(G) \leq 5$. هل يمكن تلوين البيان G بـــأربعة ألوان ولماذا ؟.

كما نلاحظ أن المجموعات

$\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3\}, \{v_6, v_8\}, \{v_7\}$

تشكل تجزئة لمجموعة رؤوس البيان وهي مجموعات مستقلة (كل مجموعة فيما بينها).هل يمكننا تجزئة رؤوس البيان في الشكل (1-4) إلى أقل من خمس مجموعات بحيث كل منها تكون مستقلة الرؤوس ؟.

مبرهنة (4-1): ليكن $G(p, q)$ بياناً بسيطاً مترابطاً. إذا كان $\Delta(G)$ أكبر درجة رأس في G، عندئذٍ يكون G قابلاً للتلوين بـ $(\Delta(G) + 1)$-لون للرؤوس.

البرهان: بالاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس. المبرهنة صحيحة عندما $p = 0$ أو $p = 1$.

لنفرض أن النظرية صحيحة من أجل كل بيان له $p - 1$ رأس ولنبرهن صحتها من أجل البيانات التي لها p رأس. ليكن G بياناً من المرتبة p وأن أكبر درجة رأس تكون $\Delta(G)$. ليكن v أي رأس من G وليكن $G_1 = G - v$ بياناً ناتجاً من G بعد حذف الرأس v مع كل الأضلاع الواقعة عليه. بما أن عدد رؤوس G_1 هو $p - 1$ وأن أكبر درجة رأس فيه هي $\Delta(G)$, فأن G_1 قابل للتلوين بـ $(\Delta(G)+1)$-لون للرؤوس. بحسب الاستقراء وحقيقة أن عدد الرؤوس المجاورة للرأس v في G لايزيد على $\Delta(G)$, عندئذٍ يمكن تلوين الرأس v بلون مختلف عن ألوان الرؤوس المجاورة له في G_1 ويؤدي ذلك إلى تلوين رؤوس البيان G بـ $(\Delta(G)+1)$-لون للرؤوس ومنه نستنتج أن G قابل للتلوين بـ $(\Delta(G) +1)$ لون.□

في عام 1941 قدم بروكس (Brook's) تحسيناً للنظرية السابقة وخفض الحد الأعلى لعدد تلوين بيان له أعلى درجة رأس $\Delta(G)$.

مبرهنة (4-2) (Brook's, 1941): ليكن $G(p, q)$ بياناً بسيطاً مترابطاً غير تام وليس حلقة من المرتبة الفردية. إذا كان $\Delta(G)$ أكبر درجة رأس في G، عندئذٍ يكون G قابلاً للتلوين بـ $\Delta(G)$-لون للرؤوس.

البرهان: لنفرض أن G بيان مترابط غير تام وليس حلقة من المرتبة الفردية. ليكن $\Delta(G) = k$. يمكننا أن نعتبر أن $k \geq 3$, لأنه إذا كان $k = 1$, فإن G يكون تاماً وعندما $k = 2$ يكون G حلقة فردية, زوجية أو بياناً ثنائي التجزئة, وفي الحالتين الأخيرتين يكون $\chi(G) = 2$.

إذا كان G بياناً غير منتظم من الدرجة k, عندئذٍ نختار رأس v_p بحيث إن $d(v_p) < k$. بما أن G بيان مترابط، يمكننا أن نبني من v_p شجرة موسعة له بأدلة متناقصة للرؤوس. الرؤوس لها الترتيب $v_p, v_{p-1}, \ldots, v_2, v_1$. لكل رأس باستثناء v_p له دليل أعلى من مجاوراته على طول مسار إلى v_p في الشجرة. نلاحظ أن لكل رأس على الأكثر k -1 رأس مجاور أدلتها أقل منه وبالتالي يمكننا تلوينها باستخدام k لون على الأكثر.

ليكن G بياناً منتظماً من الدرجة k. إذا كان لـ G رأس قاطع v, ليكن $G_1, G_2, \ldots, G_m$ مركبات البيان $G - v$, وليكن $G_i \cup v$ البيان المحدث بالمركبة G_i بالإضافة للرأس v $(i = 1, 2, \ldots, m)$. درجة الرأس v في G_i أقل من k وبالتالي يمكننا تلوين G_i بأقل من k لون ثم نعطي اللون رقم k للرأس v. ويمكن تلوين المركبات الباقية بالطريقة نفسها, وبالتالي تلوين كامل البيان بـ k لون.

الآن لنفرض أن G يكون 2-مترابط ولنعتبر أنه يحتوي مساراً مكوناً من ثلاثة رؤوس, لتكن v_1, v_p, v_2 بحيث يكون $G - \{v_1, v_2\}$ بياناً مترابطاً. يمكننا أن نرقم رؤوس الشجرة الموسعة للبيان $G - \{v_1, v_2\}$ بالترتيب $3, \ldots, p$ بشكل متزايد على طول المسار إلى الجزر v_p. كما في السابق، كل رأس قبل الرأس v_p له على الأقل k -1 رأس مجاور أقل دليل منه. بالطبع يكفي استخدام k -1 لون لتلوين مجاورات v_p، وحيث v_1 و v_p يأخذان نفس اللون.

يكفي البرهان على أن كل بيان 2-مترابط منتظم من الدرجة k (حيث $k \geq 3$) يحتوي مساراً على ثلاثة رؤوس. لنختار رأساً x. إذا كان $\kappa(G-x) \geq 2$، ليكن v_1 مجاوراً x و v_2 رأساً يبعد عن v_1 بمسافة 2 وهذا صحيح لأن G منتظم وغير تام. إذا كان $\kappa(G-x) = 1$، عندئذٍ x لها مجاور في كل كتلة، (لأن G، ليس له رأس قاطع). v_1 و v_2 المجاوران لـ x، يقعان في كتلتين مختلفتين وهما غير متجاورين فيما بينهما. علاوةً على ذلك $G - \{x, v_1, v_2\}$ بيان مترابط، لأن الكتل لاتحتوي على رؤوس قاطعة. الآن لدينا $k \geq 3$ وهذا يؤدي إلى أن $G - \{v_1, v_2\}$ بيان مترابط وعندئذٍ يكون $v_p = x$ وهو المطلوب.□

نقبل المبرهنة التالية بدون برهان.

مبرهنة (3-4) (Welsh-Powell, 1967): ليكن $G(p, q)$ بياناً بسيطاً مترابطاً له متتالية الدرجة $(d_1, d_2, \ldots, d_p)$ بحيث إن $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_p$، عندئذٍ $\chi(G) \leq 1 + \max_i \{\min\{d_i, i-1\}\}$.

مبرهنة (4-4): ليكن $G(p, q)$ بياناً بسيطاً مترابطاً، عندئذٍ

$$p/\beta_0(G) \leq \chi(G) \leq p - \beta_0(G) + 1$$

البرهان: ليكن $\chi(G) = k$. يمكن تجزئة مجموعة رؤوس البيان $G(V, E)$ إلى k مجموعة جزئية مستقلة $V_1, V_2, \ldots, V_k$ وذلك من تعريف تلوين الرؤوس للبيان G. من تعريف عدد الاستقلال نلاحظ أن $|V_i| \leq \beta_0(G)$ حيث $i = 1, 2, \ldots, k$، ومنه نجد

$$p = \sum_{i=1}^{k} |V_i| \leq k\,\beta_0(G) \Rightarrow \frac{p}{\beta_0(G)} \leq k = \chi(G) \qquad (1)$$

لنثبت الحد الأعلى للمتراجحة :

لتكن المجموعة S أكبر مجموعة مستقلة من رؤوس البيان G, عندئذٍ يكون

$$|S| = |\beta_0(G)|$$

ليكن G_1 بياناً ناتجاً من البيان G بعد حذف كل رؤوس المجموعة S مع كل الأضلاع الواقعة على رؤوسها, عندئذٍ نجد

$$\chi(G) -1 \leq \chi(G_1)$$

ومن جهة أخرى لدينا

$$\chi(G_1) \leq p - \beta_0(G)$$

ومنه نستنتج أن

$$\chi(G) \leq \chi(G_1) + 1 \leq p - \beta_0(G) + 1 \qquad (2)$$

من (1) و (2) يكون المطلوب.□

أوضح كارب في عام 1972, أن مشكلة تلوين رؤوس البيان من التعقيد NP (NP-hardness)

خوارزمية بريلز (1-4) (Brelaz Color-degree Algorithm) :

المعطيات: G(V, E) بيان مترابط.

المخرجات: تلوين رؤوس G(V, E).

خطوات الخوارزمية:

1- رقّم رؤوس البيان بشكل متناقص بحسب درجة كل رأس.

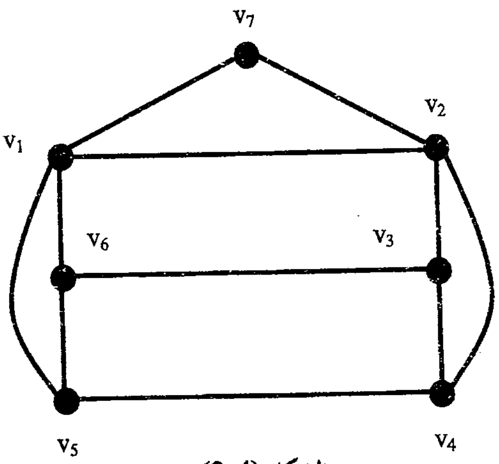
2- اعطِ الرأس الذي يملك الدرجة الأكبر، اللون 1.

3- اختر الرأس الذي له درجة أكبر مع الرؤوس الملونة، ثم اختر منها الرأس الذي له درجة أكبر مع الرؤوس غير الملونة.

4- لوّن الرأس المختار في الخطوة 3 بأقل لون ممكن.

5- إذا كانت كل الرؤوس ملونة, عندئذٍ توقف وإلا اذهب إلى 3.

مثال (4-3): جد عدد التلوين للبيان التالي بحسب خوارزمية بريلز.



الشكل (4-2)

1- نرقم الرؤوس بحسب درجتها.

2- نختار الرأس v_1 ونعطيه اللون 1.

3- نلاحظ أن الرؤوس $v_2, v_5, v_6, v_7, v_3, v_4$, لها متتالية درجة لون على الترتيب 1, 1, 1, 1, 0, 0 ولها متتالية درجة غير ملونة على الترتيب 3, 2, 2, 1, 3, 3.

4- نختار الرأس v_2 ونعطيه أقل لون ممكن وهو اللون 2.

5- هل كل الرؤوس ملونة, كلا, نعود إلى الخطوة 3.

3- نلاحظ أن الرؤوس v_7, v_3, v_4, v_5, v_6, لها متتالية درجة لون على الترتيب 2, 1, 1, 1, 1 ولها متتالية درجة غير ملونة على الترتيب 2, 2, 2, 2, 0.

4- نختار الرأس v_7 ونعطيه أقل لون ممكن وهو اللون 3.

5- هل كل الرؤوس ملونة, كلا, نعود إلى الخطوة 3.

3- نلاحظ أن الرؤوس v_3, v_4, v_5, v_6, لها متتالية درجة لون على الترتيب 1, 1, 1, 1 ولها متتالية درجة غير ملونة على الترتيب 2, 2, 2, 2.

4- نلاحظ أن كل الرؤوس متساوية في درجة اللون وفي الدرجة غير الملونة لذلك نختار منها الرأس الأقل دليل وهو الرأس v_3 ونعطيه أقل لون ممكن وهو اللون 1.

5- هل كل الرؤوس ملونة, كلا, نعود إلى الخطوة 3.

3- نلاحظ أن الرؤوس v_4, v_6, v_5, لها متتالية درجة لون على الترتيب 1 ,2 ,2 ولها متتالية درجة غير ملونة على الترتيب 2 ,1 ,1.

4- نلاحظ أن كلا الرأسين v_4, v_6, لهما درجة لون متساوية وهي 2 ودرجة غير ملونة متساوية أيضاً وهي 1, لذلك نختار منها الرأس الأقل دليل وهو الرأس v_4 ونعطيه أقل لون ممكن وهو اللون 3.

5- هل كل الرؤوس ملونة, كلا, نعود إلى الخطوة 3.

3- نلاحظ أن الرؤوس v_5, v_6, لها متتالية درجة لون على الترتيب 2, 2 ولها متتالية درجة غير ملونة على الترتيب 1, 1.

4- نلاحظ أن كلا الرأسين v_5, v_6, لهما درجة لون متساوية وهي 2 ودرجة غير ملونة متساوية أيضاً وهي 1, لذلك نختار منها الرأس الأقل دليل وهو الرأس v_5 ونعطيه أقل لون ممكن وهو اللون 2.

5- هل كل الرؤوس ملونة, كلا, نعود إلى الخطوة 3.

3- نلاحظ أن الرأس v_6, له درجة لون ودرجة غير ملونة 3.

4- كل الرؤوس ملونة ولم يبقى إلا الرأس v_6, لذلك نعطيه أقل لون ممكن وهو اللون 3.

5- هل كل الرؤوس ملونة, نعم,عندئذٍ نتوقف.

نلاحظ انه يكفي ثلاثة ألوان لتلوين رؤوس البيان وبالتالي $\chi(G) = 3$.

نقول إن للبيان $G(V, E)$ k-لوناً حرجاً, إذا كان $\chi(G) = k$ ولأجل أي ضلع $e \in E(G)$ يكون $\chi(G - e) < k$.

مثال (4-4): البيان التام K_p هو بيان حرج لأن $\chi(K_p) = p$. كذلك أيّاً كان الضلع $e \in E(K_p)$ فأن $\chi(K_p - e) = p - 1$.

(2-4) تلوين الأضلاع (edge-Coloring).

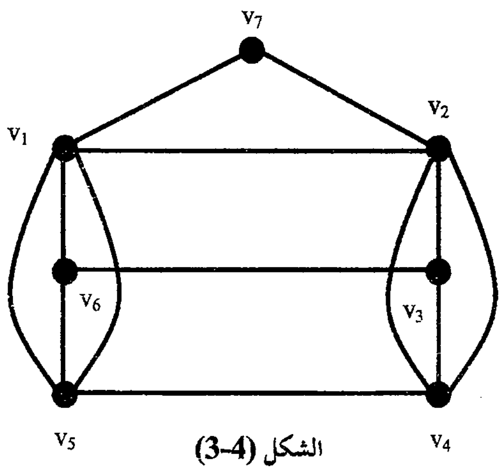
ليكن $G(V, E)$ بياناً بسيطاً مترابطاً لايحتوي على لفات. وبذلك يكون الضلعان متجاورين إذا كان لهما رأس مشتركة. نقول إن البيان G قابل للتلوين بـ k-لون للأضلاع إذا تمكنا من تلوين أضلاعه بـ k لون من الألوان المختلفة بحيث لايحتوي ضلعين متجاورين لهما اللون نفسه.

إذا كان البيان $G(V, E)$ قابلاً للتلوين بـ k-لون للأضلاع من الألوان المختلفة وغير قابل للتلوين بـ (k-1)-لون، عندئذٍ نقول إن للبيان G، k-عدداً لونياً (k-chromatic number) نرمز له $\chi_1(G)$.

مثال (4-5).

$$\chi_1(C_n) = 2 : n \equiv 0 \pmod 2,\ \ \chi_1(C_n) = 3 : n \equiv 1 \pmod 2.$$
$$\chi_1(P_n) = 2,\ \chi_1(T) = \Delta(T),$$

مثال (4-6): جد عدد تلوين أضلاع البيان الموضح بالشكل (4-3).



الشكل (4-3)

ليكن ترتيب ألوان الأضلاع بالشكل التالي:

الضلع $\{v_1, v_2\}$ يأخذ اللون 1, الضلع $\{v_1, v_7\}$ يأخذ اللون 2, الضلع $\{v_1, v_6\}$ يأخذ اللون 3, الضلع $\{v_1, v_5\}$ يأخذ اللون 4, الضلع الأخر $\{v_1, v_5\}$ يأخذ اللون 5, الضلع $\{v_2, v_3\}$ يأخذ اللون 2, الضلع $\{v_2, v_7\}$ يأخذ اللون 3, الضلع $\{v_2, v_4\}$ يأخذ اللون 4, الضلع الأخر $\{v_2, v_4\}$ يأخذ اللون 5, الضلع $\{v_3, v_4\}$ يأخذ اللون 1, الضلع $\{v_3, v_6\}$ يأخذ اللون 4, الضلع $\{v_4, v_5\}$ يأخذ اللون 2, الضلع $\{v_5, v_6\}$ يأخذ اللون 1.

نلاحظ أن $\chi_1(G) \leq 5$. هل يمكن تلوين البيان G بـ أربعة ألوان ولماذا ؟.

سنورد فيما يلي مبرهنتين لفيزينج وهما تقدمان أفضل حدين لعدد تلوين أضلاع بيان وسوف نقبلهما بدون برهان.

مبرهنة (4-5) (Vizing's theorem, 1963): ليكن $G(V, E)$ بياناً بسيطاً، عندئذٍ $\Delta(G) \leq \chi_1(G) \leq \Delta(G) + 1$.

مبرهنة (4-6) (Vizing's theorem, 1964): ليكن $G(V, E)$ بياناً له h أكبر عدد من الأضلاع المضاعفة, عندئذٍ $\Delta(G) \leq \chi_1(G) \leq \Delta(G) + h$.

مبرهنة (4-7): إذا كان p زوجي $\chi_1(K_p) = p - 1,$
إذا كان p فردي $\chi_1(K_p) = p,$

البرهان: نعلم أن لكل رأس في البيان التام له درجة $p-1$, عندئذٍ من المبرهنة (4-5) يكون $\chi_1(K_p) = p - 1$ أو $\chi_1(K_p) = p$.

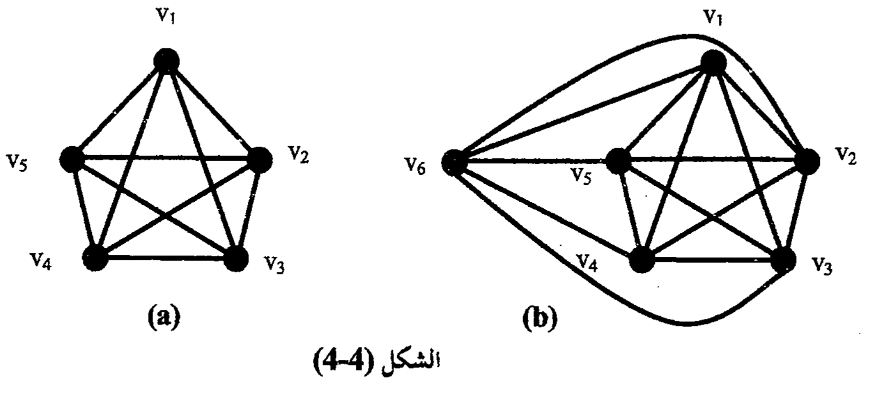
إذا كان p فردياً, عندئذٍ أكبر عدد من الأضلاع التي يمكن أن تأخذ اللون نفسه هو $(p-1)/2$. نعلم أن للبيان K_p, $p(p-1)/2$ ضلع, عندئذٍ عدد الألوان على الأقل p, ومنه $\chi_1(K_p) = p$.

إذا كان p زوجياً. عندما $p = 2$, البرهان واضح. ليكن $p > 2$, إذا حذفنا أي رأس v مع الأضلاع الواقعة عليه, عندئذٍ نحصل على بيان تام K_{p-1} مع عدد فردي من الرؤوس والتي يمكن تلوينها, كما وجدنا, بـ $p-1$-لون. نلاحظ أن لكل رأس درجة $p - 2$ وبالتالي كل منها يفقد لوناً من الـ $p-1$-لون بالنسبة للأضلاع الواقعة عليه. الآن يمكننا استخدام اللون المفقود لكل رأس لتلوين الضلع بينه وبين الرأس v بعد إعادته.□

مثال (4-7): كمثال على المبرهنة (4-7).

إذا كان p فردياً, مثلاً $p = 5$, لاحظ الشكل (4-4, a).

إذا كان p زوجياً, مثلاً $p = 6$, لاحظ الشكل (4-4, b).



الشكل (4-4)

ليكن ترتيب ألوان الأضلاع بالشكل التالي:

من أجل n فردي للبيان K_5 :

$\{v_1, v_2\} = \{v_3, v_5\} \to 1$, $\{v_1, v_3\} = \{v_4, v_5\} \to 2$,
$\{v_1, v_4\} = \{v_2, v_3\} \to 3$, $\{v_1, v_5\} = \{v_2, v_4\} \to 4$,
$\{v_2, v_5\} = \{v_3, v_4\} \to 5$,

من أجل p زوجي للبيان K_6 :

يكون ترتيب التلوين بالطريقة نفسها السابقة للبيان K_5:

$\{v_1, v_2\} = \{v_3, v_5\} \to 1$, $\{v_1, v_3\} = \{v_4, v_5\} \to 2$,
$\{v_1, v_4\} = \{v_2, v_3\} \to 3$, $\{v_1, v_5\} = \{v_2, v_4\} \to 4$,
$\{v_2, v_5\} = \{v_3, v_4\} \to 5$,

ثم نضيف اللون المفقود لكل رأس مع الرأس v_6:

$\{v_1, v_6\} \to 5$, $\{v_2, v_6\} \to 2$, $\{v_3, v_6\} \to 4$,
$\{v_4, v_6\} = \to 1$, $\{v_5, v_6\} = \to 3$.

مبرهنة (8-4) (König's theorem): إذا كان $G(E, V)$ بياناً ثنائي التجزئة، عندئذٍ $\chi_1(G) = \Delta(G)$.

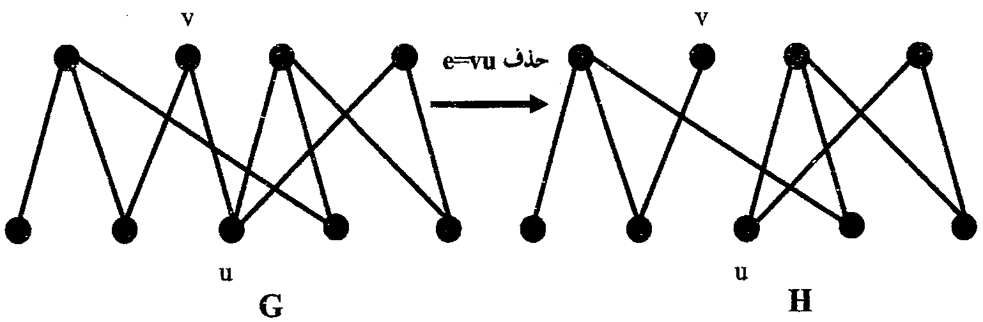
البرهان: البرهان بطريقة الاستقراء الرياضي على عدد الأضلاع q. إذا كان $q = 1$، عندئذٍ $\chi_1(G) = 1$ و $\Delta(G) = 1$ والمبرهنة صحيحة. لنفرض أن المبرهنة صحيحة من أجل أي بيان ثنائي التجزئة عدد أضلاعه أقل من q. ليكن G ثنائي التجزئة له q ضلع وأكبر درجة رأس $\Delta(G)$ وليكن H بياناً جزئياً نحصل عليه من G بحذف الضلع $e = vu$، لاحظ الشكل (4-5). بما أن H له أقل من q ضلع وأكبر درجة رأس أقل أو يساوي $\Delta(G)$، ينتج من فرض الا[illegible]

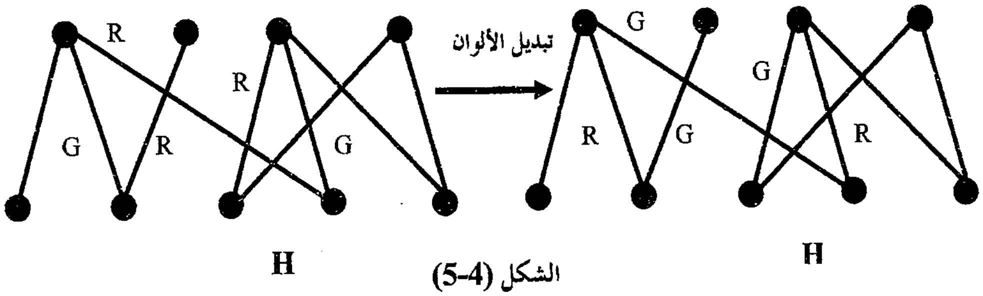
$\chi_1(H) \le \Delta(G)$. الآن نلون أضلاع H بـ $\Delta(G)$ لون ونعيد الضلع e إلى مكانه. إذا تمكنا من تلوين الضلع e بلون من الـ $\Delta(G)$–لون ومختلف عن الأضلاع المجاورة له في G, عندئذٍ يكون المطلوب.

سنبرهن أنه يمكننا دائماً تلوين e بالطريقة السابقة. بما أن H ينتج من G بحذف e = vu, عندئذٍ هناك على الأقل لون مفقود من مجاورات v في H وكذلك من مجاورات الرأس u. إذا كان اللون نفسه مفقوداً من مجاورات v و u, عندئذٍ نخصصه للضلع e ويكون G قابلاً للتلوين بـ $\Delta(G)$–لون.

لنفرض أن اللونين المفقودين من الرأسين v و u مختلفان. ليكن اللون الأخضر مفقوداً من v واللون الأحمر مفقوداً من u.

لندرس كل الرؤوس في H والتي يمكن الوصول إليها من v بمسار يحتوي على أضلاع من اللونين الأحمر والأخضر. لأن الأضلاع في أي مسار متناوبة الألوان, ينتج من ذلك عدم إمكانية الوصول لـ u بمسار أحمر–أخضر من الرأس v, (لأن G و H ثنائي التجزئة). إذا بدلنا الألوان على المسار السابق بحيث إن الضلع الأخضر يصبح أحمر والعكس صحيح, عندئذٍ تظهر الألوان عند u بدون تغيير واللون الأحمر مفقود عند v و u. الآن, يمكننا تخصيص اللون الأحمر للضلع e = vu, بذلك يمكننا تلوين البيان G بـ $\Delta(G)$–لون, لاحظ الشكل (4-5).□





الشكل (4-5)

البيان التكعيبي هو بيان منتظم من الدرجة 3.

نقبل المبرهنة التالية بدون برهان.

مبرهنة (4-9) (Appel and Haken, 1976): ليكن $G(V, E)$ بياناً مستوياً، عندئذٍ $\chi_2(G) \leq 4$. حيث $\chi_2(G)$, عدد تلوين أوجه البيان.

سيتم دراست تلوين الأوجه بالتفصيل لاحقاً.

مبرهنة (4-10): ليكن $G(V, E)$ بياناً مستوياً تكعيبياً، عندئذٍ $\chi_1(G) = 3$.

البرهان: بحسب المبرهنة (4-9), البيان G قابل للتلوين بـ 4-لون للأوجه. سوف نعبر عن الألوان الأربعة بثنائيات مركباتها الـ 0 و 1 (في Z_2) كما يلي:

$$c_1(1, 0), c_2(0, 1), c_3(1, 1), c_4(0, 0),$$

نعطي لكل ضلع مجموع الوجهين الواقع بينهما, أي ليكن الوجهان الملونان باللونين $c_1(1, 0), c_3(1, 1)$, عندئذٍ $c_1(1, 0) + c_3(1, 1) = c_2(0, 1)$.

وبالأسلوب نفسه عند جمع أي لونين لوجهين متجاورين (بينهما ضلع) من الألوان c_1, c_2, c_3, c_4 ينتج لدينا فقط ثلاث ألوان هي c_1, c_2, c_3 (يمكن التأكد من ذلك ونلاحظ أن اللون c_4 لايظهر. بما أن كل رأس من الدرجة 3، عندئذٍ يوجد عند كل رأس ثلاثة أوجه متجاورة مثنى مثنى وحيث إن كل ضلع يفصل بين وجهين متجاورين فقط ومنه لايمكن أن يأخذ أي ضلعين متجاورين اللون نفسه من الألوان الثلاثة الناتجة وهو لمطلوب.□

ليكن $G(V, G)$ بياناً، نقول عن مجموعة M من أضلاع البيان إنها مستقلة (matching or independent of edges) إذا كانت لاتحتوي على ضلعين متجاورين. أكبر مجموعة مستقلة من الأضلاع (maximum matching)، نرمز لها بـ M_{max}.

خوارزمية (2-4) (Edge-Coloring by Maximum Matching):

المعطيات: $G(V, E)$ بيان مترابط.

المخرجات: تلوين أضلاع $G(V, E)$ بـ k لون.

<u>خطوات الخوارزمية:</u>

1- $k := 0$.

2- بينما $|E(G)| \neq \phi$، ضع $k := k + 1$.

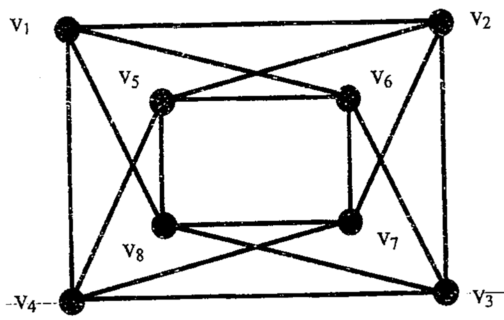
3- جد M_{max} للبيان G.

4- لأجل كل ضلع $e \in M_{max}$، $f(e) := k$، (أعطِ اللون k لكل ضلع $e \in M_{max}$).

5- $G := G - M_{max}$.

6- إذا كانت كل الأضلاع ملونة, عندئذٍ توقف واطبع $\chi_1(G) = k$, وإلا كرر الخطوات 2, 3, 4, 5, 6.

مثال (4-8): جد عدد تلوين الأضلاع للبيان التالي بحسب الخوارزمية السابقة.



الشكل **(6-4, a)**

الحل:

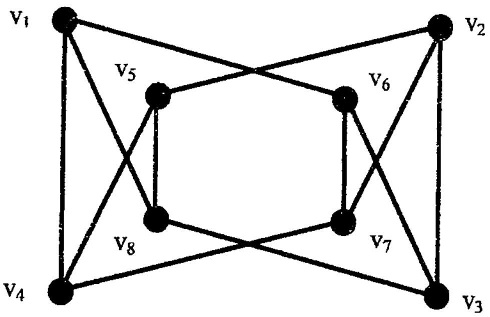
1- $k := 0$.

2- بينما $|E(G)| \neq \phi$, ضع $k := 0 + 1$.

3- لتكن التجزئة $M = \{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6, v_7v_8, \}$ للبيان G.

4- لأجل كل ضلع $e \in M$, $f(e) := 1$.

5- $G := G - M$.



الشكل (6-4, b)

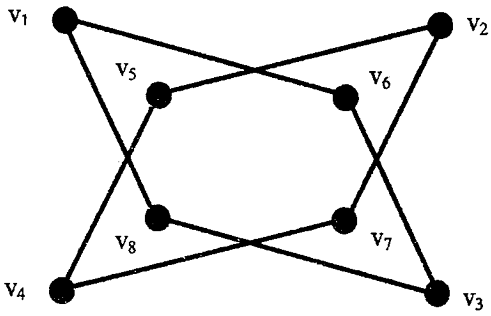
6- هل كل الأضلاع ملونة, كلا. كرر الخطوات 2, 3, 4, 5, 6.

2- بينما $|E(G)| \neq \phi$, ضع $k := 1 + 1 = 2$.

3- لتكن التجزئة $M = \{v_1v_4, v_2v_3, v_5v_8, v_6v_7, \}$ للبيان G.

4- لأجل كل ضلع $e \in M$, $f(e) := 2$.

5- $G := G - M$.



الشكل (6-4, c)

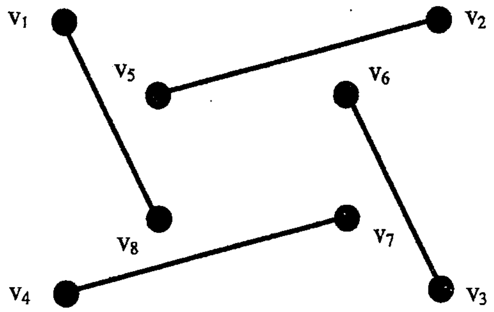
6- هل كل الأضلاع ملونة, كلا. كرر الخطوات 2, 3, 4, 5, 6.

2- بينما $|E(G)| \neq \phi$, ضع $k := 2 + 1 = 3$.

3- لتكن التجزئة $M = \{v_1v_6, v_3v_8, v_2v_7, v_4v_5, \}$ للبيان G.

4- لأجل كل ضلع e∈M, $f(e) := 3$.

5- $G := G - M$.



الشكل (6-4, d)

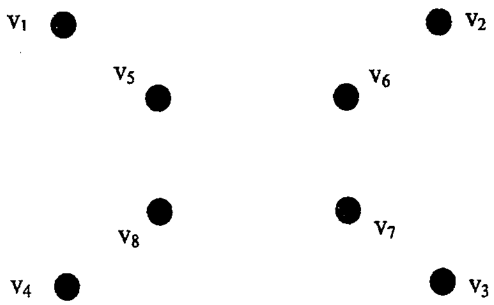
6- هل كل الأضلاع ملونة, كلا. كرر الخطوات 6 ,5 ,4 ,3 ,2.

2- بينما $|E(G)| \neq \phi$, ضع $k := 3 + 1 = 4$.

3- لتكن التجزئة $M = \{v_1v_8, v_2v_5, v_3v_6, v_4v_7\}$ للبيان G.

4- لأجل كل ضلع e∈M, $f(e) := 4$.

5- $G := G - M$.



الشكل (6-4, e)

6- هل كل الأضلاع ملونة, نعم. $\chi_1(G) = k = 4$.

(3-4) تلوين الخرائط (Map-Coloring).

لقد ظهرت مسألة تلوين الخرائط من خلال الحاجة لتلوين الخرائط الجغرافية ولاسيما مشكلة تلوين البلدان المتجاورة بألوان مختلفة عن بعضها بعضاً بحيث يخصص لكل دولة لون واحد ضمن حدودها. من جهة أخرى يمكن استخدام الألوان لتلوين التمايز ضمن البلد الواحد (إذا كانت الخارطة تعبر عن رسم لدولة واحدة) وكمثال على ذلك الأزرق لتلوين المسطحات المائية والأخضر لتلوين الغابات والمناطق الزراعية وهكذا ... .

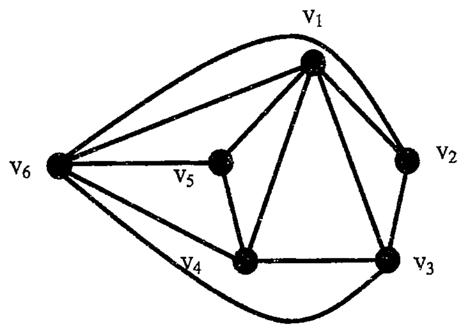
نقول عن البيان G إنه قابل للغمر (imbedding) في السطح S, إذا كان يماثل بياناً هندسياً مرسوماً في S. إذا كان S مستوياً, وكان G مغموراً في S بدون أي تقاطعات بين أضلاعه, عندئذٍ نقول عن G إنه بيان مستوٍ (planar graph).

يمكننا الآن تعريف الخارطة (map) على أنها بيان خال من الجسور والتقاطعات مغمور في السطح S, يمكن أن يكون السطح S مستوياً أو أي سطح مغلق كالكرة مثلاً. عند غمر البيان G في السطح S, يجزئه إلى أجزاء مغلقة تدعى أوجه الخارطة (regions). سوف نهتم هنا بالخرائط المستوية، أي البيانات التي لاتتقاطع أضلاعها فيما بينها ولاتحتوي على برازخ. سوف نعتبر أن الخارطة عبارة عن البيان المستوي G(V, E).

نقول إن البيان المستوي G (الخارطة G) قابل للتلوين بـ k-لون, إذا تمكنا من تلوين مناطق (أوجه الخارطة) بـ k-لون, بحيث لايوجد منطقتان متجاورتان (تشتركان بضلع) لهما اللون نفسه.

يكون عدد التلوين لأوجه البيان G (chromatic number of map), هو k-لون, إذا كان k أقل عدد من الألوان التي يمكن تلوين أوجه البيان بها ونرمز لذلك بـِ $\chi_2(G) = k$. منعاً للالتباس سوف نرمز بـِ r_i لكل وجه ولعدد أوجه البيان بـِ R.

مثال (4-9): جد عدد تلوين أوجه البيان الموضح بالشكل (4-7).



الشكل (4-7)

نلاحظ أن أوجه البيان تكون بالشكل التالي:

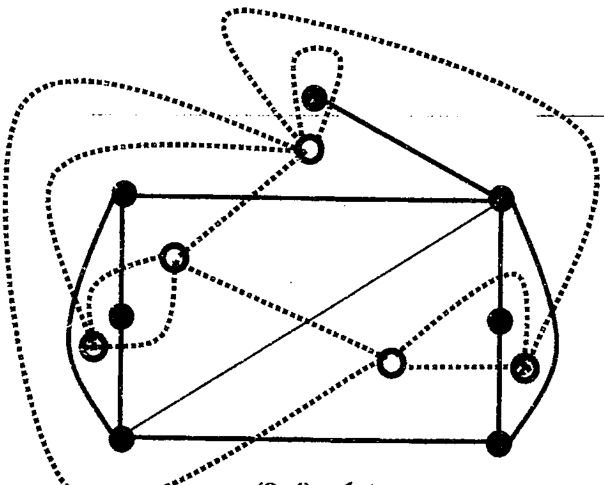
$$R = \{v_1v_2v_3,\ v_1v_2v_6,\ v_1v_3v_4,\ v_1v_4v_5,\ v_1v_5v_6,\ v_3v_4v_6,\ v_4v_5v_6,\ v_2v_3v_6\}$$

لنرتب تلوين الأوجه بالشكل التالي:

$r_1 = \{v_1v_2v_3\} \rightarrow 1,$
$r_2 = \{v_1v_2v_6\} \rightarrow 2,$
$r_3 = \{v_1v_3v_4\} \rightarrow 2,$
$r_4 = \{v_1v_4v_5\} \rightarrow 1,$
$r_5 = \{v_1v_5v_6\} \rightarrow 3,$
$r_6 = \{v_3v_4v_6\} \rightarrow 1,$
$r_7 = \{v_4v_5v_6\} \rightarrow 2,$
$r_8 = \{v_2v_3v_6\} \rightarrow 3.$

نلاحظ أنه يكفي ثلاثة ألوان لتلوين أوجه البيان, أي أن $\chi_2(G) = 3$.

نقول إن البيان G مرافق للبيان H, إذا كان G ينتج من H بأستبدال كل وجه برأس (بما في ذلك الوجه الخارجي), ومقابل كل ضلع في G يفصل بين وجهين فيه, نرسم ضلعاً يقطعه ولايقطع أي ضلع غيره ويصل بين الرأسين داخل الوجهين, (في حالة البرزخ نرسم لفة تصل الرأس بنفسه وتقطع البرزخ). لاحظ الشكل (8-4), البيان G له الرؤوس والأضلاع السوداء, البيان H له الرؤوس البيضاء والأضلاع المتقطعة.



الشكل (8-4)

من خلال ماتقدم يمكن دراسة تلوين رؤوس البيان المرافق عوضاً عن دراسة تلوين أوجه البيان الأصلي.

تخمين الألوان الأربعة (4-1): يمكن تلوين أوجه البيان المستوي بـ 4 ألوان أو أقل.

مبرهنة (4-11): (Kubale, 2004) ليكن G بياناً ثنائي التجزئة مستوياً, أنّ البيان المرافق H يكون أويلرياً.

البرهان: يترك كتمرين للطالب.

مبرهنة (4-12): (Kubale, 2004) ليكن G بياناً مستوياً خالياً من الرؤوس ذات الدرجة 1. وليكن H بياناً مرافقاً له, عندئذٍ يكون G قابلاً للتلوين بـ k-لون للأوجه إذا وفقط إذا كان H قابلاً للتلوين بـ k-لون للرؤوس.

البرهان: يترك كتمرين للطالب.

مبرهنة (4-13): الخارطة المستوية G قابلة للتلوين بـ 2-لون للأوجه إذا وفقط إذا كان G بياناً أويلرياً.

البرهان: ليكن H البيان المرافق للبيان G. من المبرهنة (4-12), G قابل للتلوين بـ 2-لون للأوجه إذا وفقط إذا كان H قابلاً للتلوين بـ 2-لون للرؤوس. H قابل للتلوين بـ 2-لون للرؤوس إذا وفقط إذا كان ثنائي التجزئة. من تعريف المرافق، نجد أن H بيان مستو. بحسب المبرهنة (4-11) يكون H ثنائي التجزئة إذا وفقط إذا كان G بياناً أويلرياً.□

سوف نعرض للمبرهنة التالية ونقبلها هنا بدون برهان والتي نقدم برهانها في فصل المستوي لاحقاً.

مبرهنة (4-14): كل بيان مستو يحتوي على الأقل رأساً من الدرجة 5 على الأكثر, أي أن $\delta(G) \leq 5$.

مبرهنة (4-15) (Heawood, 1890): ليكن $H(V, E)$ بياناً مستوياً، عندئذٍ $\chi_2(H) \leq 5$.

البرهان: ليكن $G(V, E)$ بياناً مرافقاً للبيان H. نبرهن بالاستقراء الرياضي على عدد أوجه البيان H, أي على عدد رؤوس البيان G. ليكن $G(V, E)$ بياناً من المرتبة p. إذا كان $p \leq 5$, فالنظرية واضحة. لنعتبر أن $p \geq 6$, بالاستقراء نعتبر أن كل بيان من المرتبة p -1 قابل للتلوين بـ 5 ألوان. بحسب المبرهنة (4-14), البيان G يحتوي رأس v من الدرجة 5 على الأكثر. من الفرض لدينا $G - v$ بيان مستو من الرتبة p -1 وقابل للتلوين بـ 5 ألوان. إذا لم نستخدم الـ 5 ألوان على مجاورات v, عندئذٍ يمكننا تخصيص الرأس v بلون لم يستخدم وبالتالي G قابل للتلوين بـ 5 ألوان.

لنفرض أن الـ 5 ألوان مستخدمة في تلوين مجاورات v (حيث $\rho(v) = 5$) بدون التقليل من العمومية, لتكن v_i الرؤوس المجاورة للرأس v وكل منها له اللون i, حيث $i = 1, 2, 3, 4, 5$. بالإضافة إلى ذلك نعتبر أن هذه الرؤوس تشكل حلقة حول v. لندرس أي لونين لرأسين غير متعاقبين, ليكن الرأسان v_1 و v_3, لهما اللونين 1 و 3 على الترتيب. وليكن G_1 بياناً جزئياً من البيان $G - v$ مكوناً من الرؤوس الملونة بأحد اللونين 1 أو 3. إذا كان الرأسان v_1 و v_3 ينتميان إلى

مركبتين مختلفتين من G_1, عندئذٍ نبدل الألوان بواحدة من هذه المركبات ونحصل على لون غير مستخدم ونعطيه للرأس v.

لنفرض أن الرأسين v_1 و v_3 ينتميان إلى مركبة واحدة من G_1 وبالتالي يوجد مسار من v_1 إلى v_3 له رؤوس متعاقبة الألوان بـ 1 و 3. المسار P مع المسار v_1, v, v_3 يشكلان حلقة تضم v_2 أو الرأسين v_4 و v_5 معاً. ينتج من ذلك أنه لايوجد مسار متناوب باللونين 4 ,2 يربط بين الرأسين v_2 و v_4 في G. ليكن G_2 بياناً جزئياً من G محدثاً بالرؤوس الملونة بأحد اللونين 2 و 4. الآن, بتبديل الألوان في المركبة G_2, نجد أن الرأس v_2 ملون بغير اللون 2 والذي يمكن استخدامه للرأس v, ومنه ينتج أن G قابل للتلوين بـ 5 ألوان, أي أن $\chi_2(H) \leq 5$.□

الخارطة التكعيبية هي خارطة لجميع رؤوسها درجة متساوية وتساوي 3. كما أن أطوال تخوم أي وجه في البيان G, هو عدد الأضلاع المحيطة بالوجه.

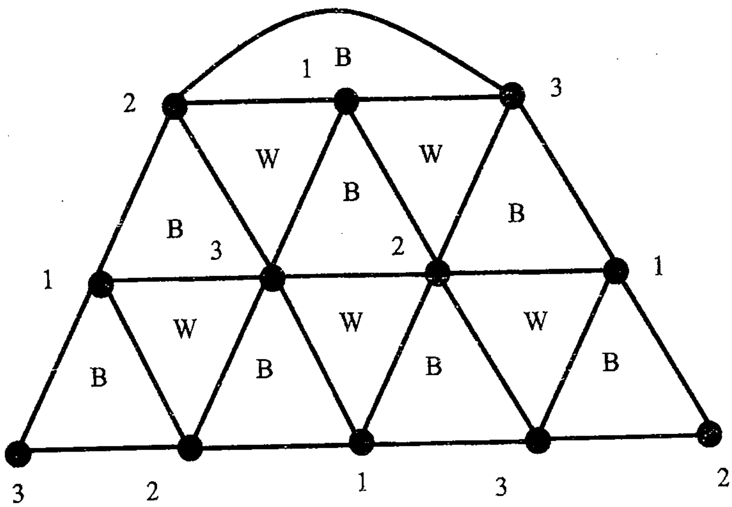
مبرهنة (4-16): ليكن G(V, E) بياناً مستوياً تكعيبياً، عندئذٍ $\chi_2(G) \leq 3$ إذا وفقط إذا كانت أطوال تخوم أوجه G أعداداً زوجية.

البرهان: لنفرض أن الخارطة المستوية G قابلة للتلوين بـ 3 للأوجه. بما أن G بيان تكعيبي, فأن كل وجه يشترك بضلع واحد فقط مع الضلع المجاور له. ليكن للوجه r اللون 1, عندئذٍ الأوجه المجاورة لـ r تأخذ اللونين 2 و 3 بالتناوب, ومنه نستنتج أن عدد الأوجه المحيطة يجب أن تكون زوجيةً.

لبرهان الاتجاه المعاكس, نفرض G خارطة مستوية تكعيبية وعدد الأضلاع المحيطة بكل وجه, هو عدد زوجي. في البيان المرافق H, لدينا درجة كل رأس, عدد زوجي وكل وجه يكون C_3, ومنه ينتج أن H بيان أويلري. بحسب المبرهنة (4-13) يكون H قابلاً للتلوين بـ 2 لون للأوجه, وليكن اللونان الأبيض والأسود. لنثبت أن H قابل للتلوين بـ 3 ألوان بالنسبة للرؤوس. ليكن r'_1 أي وجه ملون بالأسود, وبحيث إن رؤوسه ملونة بالألوان 1, 2, 3 مرتبة باتجاه حركة عقارب الساعة حول r'_1. الآن, نلون رؤوس كل وجه ملون بالأسود ومشترك برأس مع r'_1, بالألوان 3 , 2 ,1 وباتجاه حركة عقارب الساعة. وهكذا نستمر بتلوين رؤوس الأوجه المحيطة بوجه سبق أن قمنا بتلوين رؤوسه, لاحظ الشكل (4-9). ومنه نستنتج إمكانية تلوين رؤوس H بثلاثة ألوان. من المبرهنة (4-12) ينتج أن الخارطة المستوية G قابلة للتلوين بـ 3 ألوان بالنسبة للأوجه.□

مبرهنة (4-17) (Appel and Haken, 1976): ليكن G(V, E) بياناً مستوياً، عندئذٍ $\chi_2(G) \le 4$.

تقبل بدوب برهانها الطويل جداً.



الشكل (9, 4)

ملاحظة (1-4): يعمل الباحثون للبرهان على أن $\chi_2(G) \leq 3$, حيث G بيان مستوٍ.

(4-4) دالة التلوين (Chromatic Polynomials).

خلال المحاولات العديدة لحل مسألة الألوان الأربعة وجد بيركوف (Birkhoff, 1912), عدد الطرق لتلوين رؤوس البيان من خلال معادلة تسمى دالة التلوين.

ليكن G بياناً بسيطاً مع λ من الألوان المختلفة. نقول عن c_1 و c_2 تلوينين مختلفين لرؤوس البيان بـ λ-لون, إذا وجد رأس في G له لون في التلوين c_1 مختلف عن اللون الذي أخذه في التلوين c_2. نعرف الدالة $P(G: \lambda)$, بأنها دالة التلوين لرؤوس

البيان بـ λ-لون. عدد طرق تلوين البيان هو عدد التلوينات المختلفة للبيان G بـ $\chi(G)$ لون, أي نعوض في دالة التلوين $P(G: \lambda)$, المعامل λ بـ $\chi(G)$.

إذا كان $\lambda < \chi(G)$, فإن $P(G: \lambda) = 0$ وهذا ينتج من عدم إمكانية تلوين رؤوس بيان بعدد من الألوان أقل من عدد التلوين له. بكل سهولة يمكن التأكد من أنه, إذا كان $\lambda_2 \geq \lambda_1$, فإن $P(G: \lambda_2) \geq P(G: \lambda_1)$.

لنتأمل البيان K_1. نعلم أن $\chi(K_1) = 1$ وبسهولة نجد أن هناك طريقة واحدة لتلوين بيان مكون من رأس واحد, أي أن $P(K_1: 1) = 1$.
ليكن البيان K_2. من الواضح أن $\chi(K_2) = 2$ والسؤال ماعدد الطرق لتلوين رؤوس K_2 بلونين. لتكن رؤوس البيان v_1 و v_2. يمكننا أن نلون الرأس v_1 بطريقتين (أما نعطيه اللون الأول أو اللون الثاني), بعد تلوين الرأس v_1, يبقى لدينا لون واحد لتلوين الرأس v_2 وبالتالي عدد الطرق الممكنة لتلوين البيان K_2, تكون مساوية إلى 2. مما سبق نستنتج أن $P(K_2: 2) = 2(1) = 2$.

لنحسب عدد الطرق الممكنة لتلوين K_3 بـ λ لون, أي لنجد $P(K_3: \lambda)$. ولتكن $\{v_1, v_2, v_3\}$, رؤوس البيان. يمكن تلوين الرأس v_1 بـ λ لون, بعد تلوين الرأس v_1, يبقى لدينا $\lambda -1$ لون ويمكن تلوين الرأس v_2 بأي منها وبالتالي هناك $\lambda -1$ طريقة لتلوين الرأس الثاني بعد تلوين الرأس الأول (بالطبع هناك $\lambda -1$ اختيار للرأس الثاني مقابل كل اختيار للرأس الأول), أي أن عدد الطرق الممكنة لتلوين الرأسين الأول والثاني تكون $\lambda (\lambda -1)$. بعد تلوين الرأسين الأول والثاني, يبقى لدينا $\lambda -2$ لون لتلوين الرأس v_3 (هذا مقابل كل لونين مخصصين للرأسين v_1 و v_2) وبالتالي عدد الطرق الممكنة لتلوين رؤوس البيان تكون $\lambda (\lambda -1) (\lambda -2)$.

مما سبق نستنتج أن $P(K_3: \lambda) = \lambda (\lambda -1) (\lambda -2)$. نعلم أن $\chi(K_3) = 3$, ومنه نجد $P(K_3: 3) = 3 (3 -1) (3 -2) = 6$.

يمكننا الآن تعميم الطريقة السابقة لحساب دالة التلوين للبيان التام K_p, فنجد

$$P(K_p: \lambda) = \lambda (\lambda -1) (\lambda -2) (\lambda -3) \dots (\lambda - p +1).$$

سوف نوجد دالة التلوين لشجرة T, عدد رؤوسها p وذلك من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة (4-18): لتكن T شجرة عدد رؤوسها p, عندئذٍ

$$P(T: \lambda) = \lambda (\lambda -1)^{p-1} .$$

البرهان: بطريقة الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس p. لأجل $p = 1, 2$, المبرهنة صحيحة. بفرض أن المبرهنة صحيحة من أجل كل الأشجار والتي لها رتبة أقل من p ولنثبت صحتها من أجل شجرة من الرتبة p. ليكن v رأس من T وله الدرجة 1. ليكن $T_1 = T - v$. نجد أن T_1 شجرة من الرتبة $p - 1$, وبحسب الاستقراء يكون $P(T_1: \lambda) = \lambda (\lambda -1)^{p-2}$.
بما أن الرأس v من الدرجة 1, عندئذٍ يمكن تلوينه بأي لون من λ -1 لون مختلف عن اللون الذي يأخذه الرأس المجاور لـِ v ومنه نستنتج أن

$$P(T_1: \lambda) = (\lambda -1) P(T_1: \lambda) = \lambda (\lambda -1)^{p-1}. \square$$

رأينا إلى الآن كيفية إيجاد دالة التلوين للبيان التام وللشجرة. ليكن G بياناً بسيطاً ليس بشجرة وغير تام, عندئذٍ المبرهنة التالية ستوضح لنا كيف يمكن إيجاد دالة التلوين لهذا البيان. ليكن الرأسان v و u رأسين غير متجاورين, وليكن G_1

بياناً ينتج من G بإضافة ضلع $e = vu$ بين الرأسين v و u, كذلك ليكن G_2 بياناً ينتج من G بتطابق الرأسين v و u ثم استبدال كل ضلع مضاعف بضلع بسيط.

مبرهنة (4-19): ليكن G بياناً بسيطاً غير تام, عندئذٍ

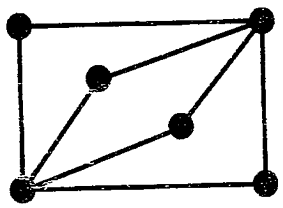
$$P(G: \lambda) = P(G_1: \lambda) + P(G_2: \lambda) .$$

البرهان: ليكن v و u رأسين غير متجاورين في G. ليكن c تلويناً ما لرؤوس البيان, عندئذٍ لدينا حالتان أولاهما لـِ v و u نفس اللون والثانية v و u مختلفتا اللون. نلاحظ في الحالة الأولى أن عدد طرق التلوين للبيان G يساوي عدد طرق التلوين للبيان G_1 وفي الحالة الثانية عدد طرق التلوين للبيان G يساوي عدد طرق التلوين للبيان G_2, وفي الوقت نفسه لايوجد حالات أخرى. منه نستنتج أن

$$P(G: \lambda) = P(G_1: \lambda) + P(G_2: \lambda) . \square$$

يمكننا الاستفادة من المبرهنة السابقة لإيجاد دالة التلوين لبيان G بسيط وغير تام من خلال إيجاد دالة التلوين للبيانين G_1 و G_2. إذا كان أحد البيانين G_1 و G_2 أو كلاهما, غير تام عندئذٍ نعيد الإجراء السابق نفسه على أي بيان منهما غير تام. نستمر بالطريقة نفسها حتى نحصل على بيانات تكون جميعها تامة, حيث إن دالة التلوين للبيان التام معلومة بالنسبة لنا.

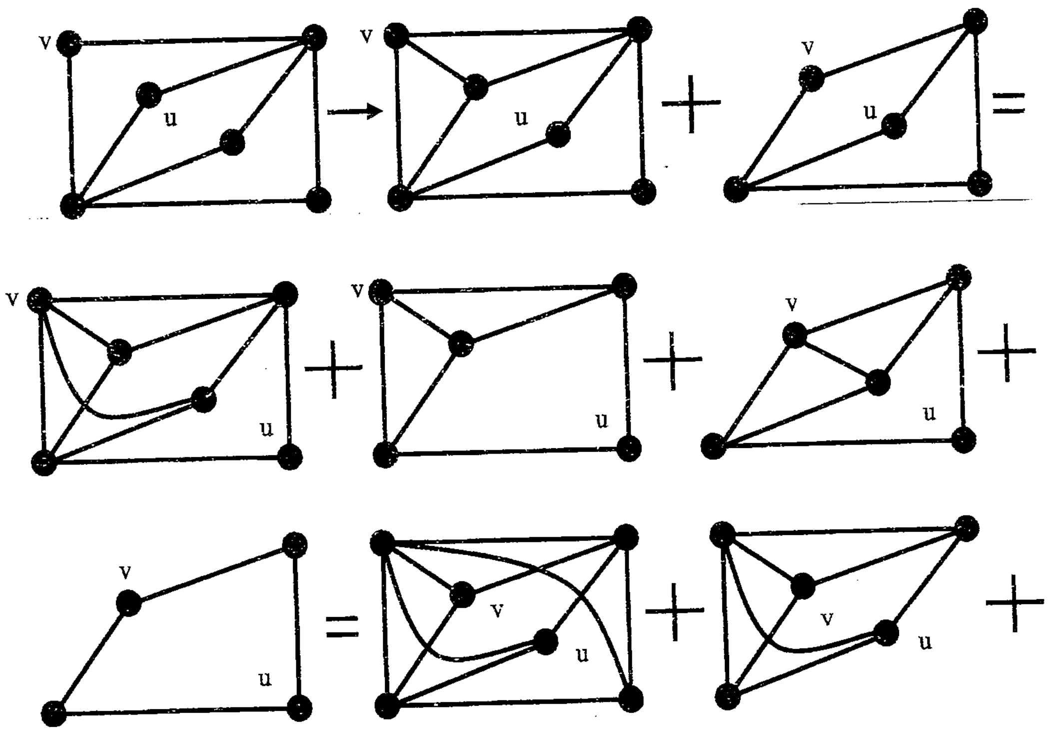
مثال (4-9): جد دالة التلوين للبيان الموضح في الشكل (4-10), ثم جد عدد طرق تلوينه من أجل عدد التلوين له $\chi(G)$.

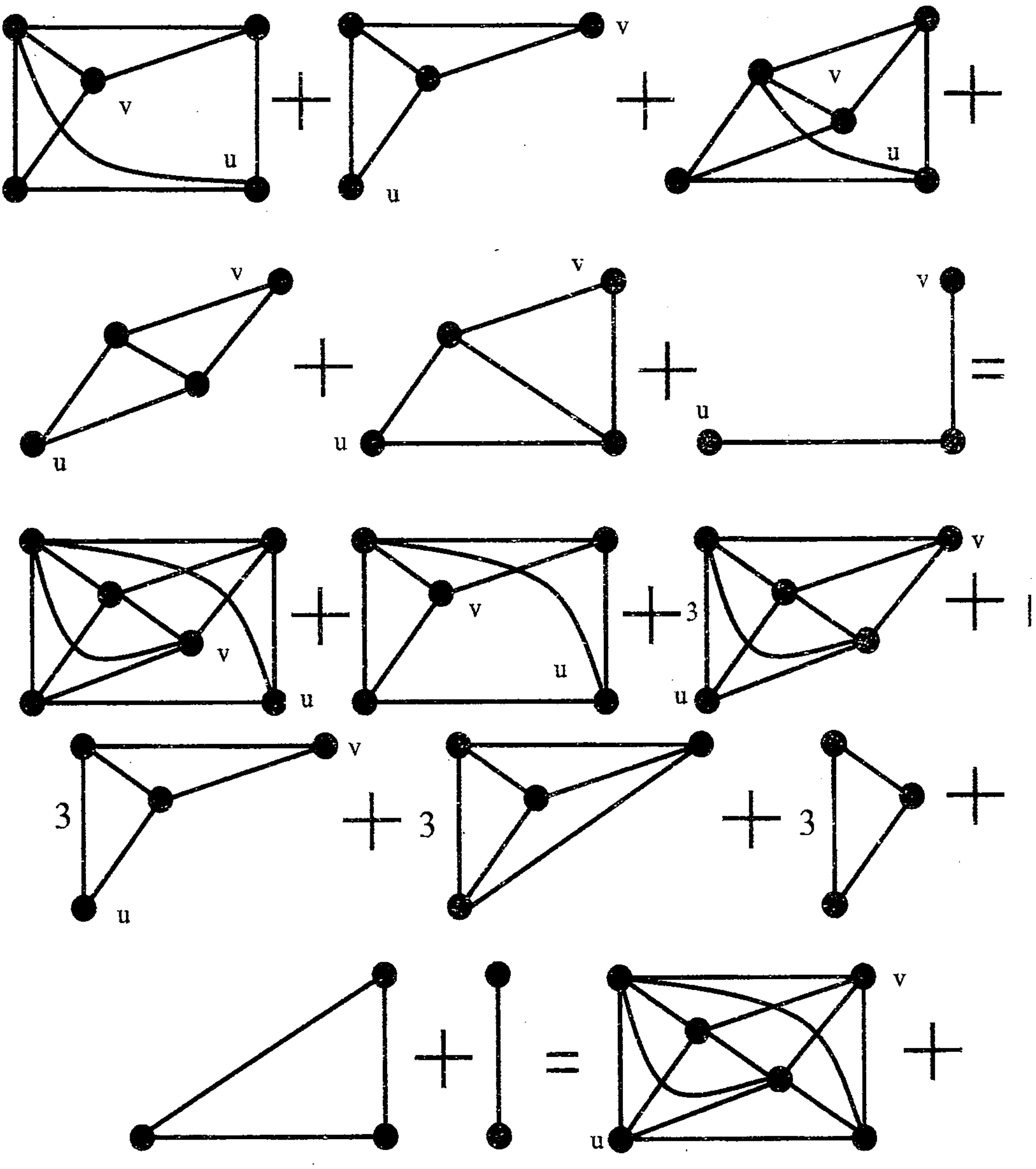


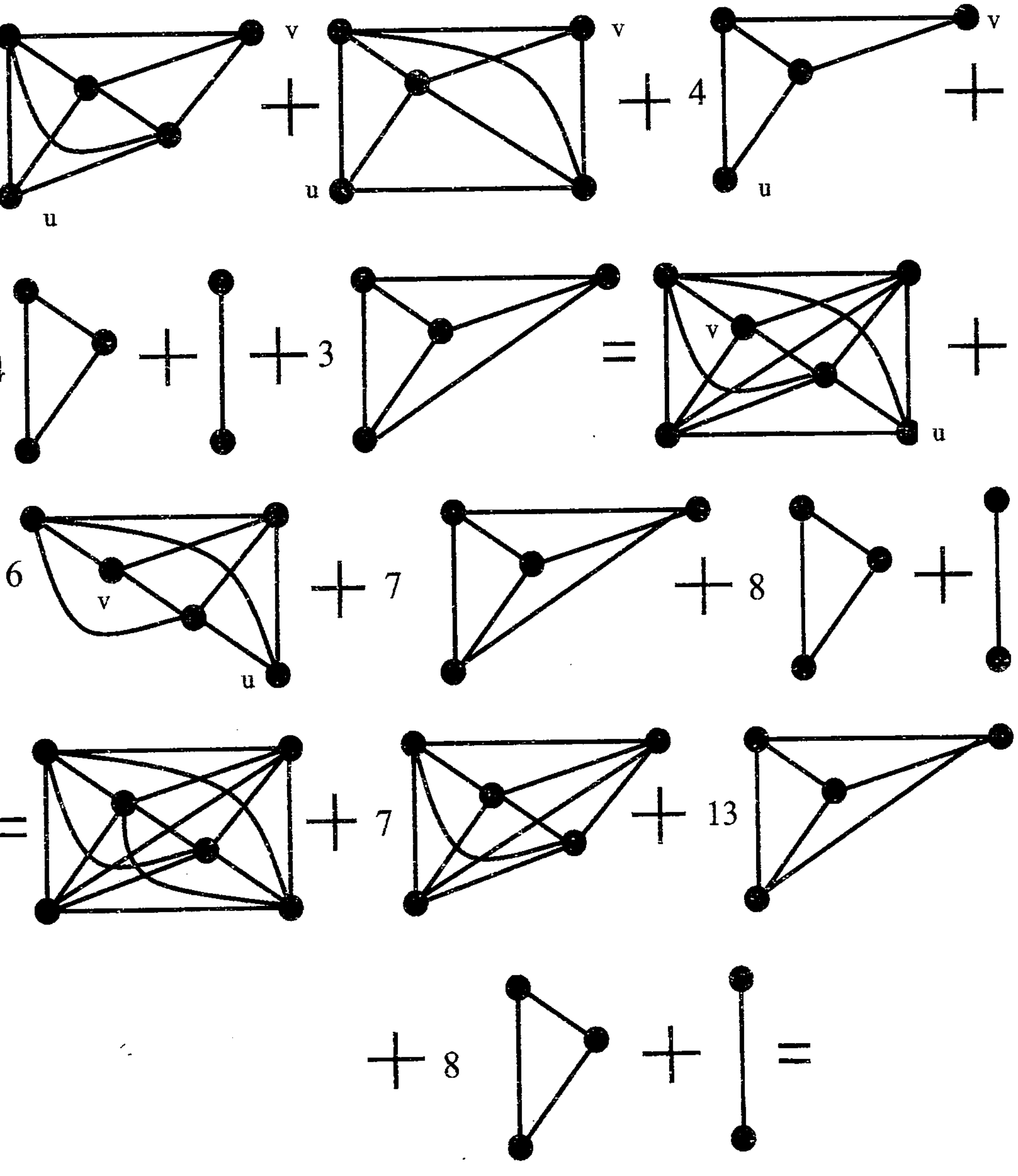
الشكل (4-10)

الحل:

$P(G:\lambda) =$




v
u
v
u
v
u
v
u
v
u
v
u
v
u
v
u
3
v
u
v
3
v
u
3
3
3
v
u



$$P(G:\lambda) = P(K_6:\lambda) + 7\,P(K_5:\lambda) + 13\,P(K_4:\lambda) + 8\,P(K_3:\lambda) + P(K_2:\lambda)$$

أي أن

$$P(G:\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5) + 7\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4) + 13\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + 8\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda(\lambda-1)$$

$$= \lambda(\lambda-1)[(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5) + 7(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4) + 13(\lambda-2)(\lambda-3) + 8(\lambda-2) + 1]$$

نلاحظ أن $\chi(G) = \lambda = 2$. نعوض في المعادلة فنجد

$$P(G:2) = 2(2-1)[1] = 2.$$

مبرهنة (4-20): ليكن $G(p, q)$ بياناً بسيطاً له المركبات $G_1, \ldots, G_k$، عندئذٍ دالة التلوين له تحقق الخواص التالية:

1) $P(G:\lambda)$ من الدرجة p.

2) معامل λ^p هو 1.

3) معامل λ^0 هو 0.

4) معامل λ^{p-1} هو $q - 1$.

5) $P(G:\lambda) = P(G_1:\lambda)\, P(G_2:\lambda) \ldots P(G_k:\lambda)$.

(4-5) مجموع التلوين للبيان (Sum Coloring of Graphs).

في 1989, كيوبكا و سكوينك (Kubicka and Schwenk), قدما فكرة جديدة للتلوين وهي مجموع التلوين (sum coloring) للبيان G.

ليكن البيان $G(V, E)$ مع مجموعة الرؤوس $V(G) = \{v_1, \ldots, v_p\}$ و مجموعة الأضلاع $E(G) = \{e_1, \ldots, e_q\}$. نعرف مجموع عدد التلوين للرؤوس (vertex chromatic sum)، $\sum(G)$ بأنه

$$\sum(G) = \min_c \sum(G, c),$$

حيث

$$\sum(G, c) = \sum_{v \in V(G)} c(v),$$

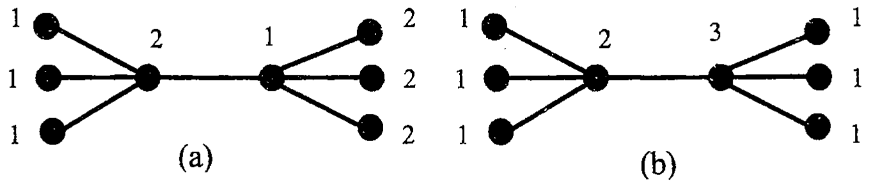
مع العلم أن

$$c : V(G) \to N.$$

بمعنى أخر, أن مجموع عدد التلوين للرؤوس هو أقل مجموع لتلوين الرؤوس.

نعرف عدد مجموع التلوين للبيان G (vertex sum chromatic)، وهو أقل عدد تلوين لـ G من أجله يكون مجموع التلوين للرؤوس أقل مايمكن ونرمز له $s(G)$.

مثال (4-10): جد مجموع عدد التلوين و عدد مجموع التلوين للبيان الموضح في الشكل (4-11).



الشكل (4-11)

نلاحظ أنه لدينا البيان G نفسه في الشكلين ((11-4,(a)) و ((11-4,(b)).

في الشكل ((11-4,(a)), لدينا $\chi(G) = 2$, و مجموع عدد التلوين

$$\sum(G,c) = \sum_{v \in V(G)} c(v) = 12,$$

في الشكل ((11-4,(b)), لدينا $\chi(G) = 3$, و مجموع عدد التلوين

$$\sum(G,c) = \sum_{v \in V(G)} c(v) = 11,$$

ومنه نستنتج أن مجموع عدد التلوين هو

$$\sum(G) = \min_{c} \sum(G,c) = 11.$$

ومنه نلاحظ أن $s(G) = 3$.

بنفس الشكل نعرف مجموع عدد التلوين (edge chromatic sum)، $\sum_1(G)$ وعدد مجموع التلوين للأضلاع (edge sum chromatic)، $s_1(G)$.

مجموع عدد التلوين للأضلاع

$$\sum_1(G) = \min_{c} \sum_1(G,c),$$

و

$$\sum_1(G,c) = \sum_{e \in E(G)} {}_1 c(e)$$

حيث

$$c : E(G) \to N$$

نعلم مسبقاً أن $\chi_1(G) = \chi(L(G))$، و $s_1(G) = s(L(G))$، وبالتالي يكفي دراسة مجموع عدد التلوين وعدد مجموع التلوين للرؤوس فقط.

نورد بعض المبرهنات بدون برهان والتي تقدم مجموع عدد التلوين وعدد مجموع التلوين لبعض البيانات الخاصة وكذلك مفاهيم حول حدود مجموع عدد التلوين وعدد مجموع التلوين للرؤوس لبيان كيفي.

مبرهنة (4-21): (Malafiejski)،

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \sum P_n = \lfloor 3n/2 \rfloor,\\
&(2)\quad \sum C_n = 3\lceil n/2 \rceil \ \ for\ \ n \geq 3,\\
&(3)\quad \sum W_n = \begin{cases} 3(n+1)/2, & for\ n\ odd,\\ 3(n/2)+4, & for\ n\ even,\end{cases}\\
&(4)\quad \sum (K_n) = n(n+1)/2,\\
&(5)\quad \sum (K_{r,s}) = r+s+\min\{r, s\}.
\end{aligned}
$$

مبرهنة (4-22): (Kubale, 2004) لأجل أي بيان مترابط G(p, q)، يكون

$s(G) \leq \Delta(G)+1,$

بالإضافة إلى ذلك $s(G) = \Delta(G)+1$، فقط عندما يكون G بياناً تاماً أو حلقة فردية.

مبرهنة (4-23): (Kubicka and Schwenk), لتكن T شجرة من المرتبة p ≥1, عندئذٍ $p+1\leq \sum(T) \leq\lfloor 3p/2\rfloor$. بالإضافة إلى ذلك لأجل كل عدد صحيح k حيث $p+1\leq k \leq\lfloor 3p/2\rfloor$ يوجد شجرة من الرتبة p لها مجموع تلوين مساوياً إلى k.

مبرهنة (4-24): (Kubale, 2004) لأجل أي بيان G(p, q), يكون

(1) $p\leq \sum G \leq p+q$,

(2) $\lfloor\sqrt{8q}\rfloor\leq \sum G \leq\lfloor 3(q+1)/2\rfloor$,

(3) $s(G)(s(G)+1)/2\leq \sum G \leq p(\chi(G)+1)/2$,

(4) $(\lfloor n/\beta_0(G)\rfloor+1)(p-\lfloor p/\beta_0(G)\rfloor\beta_0(G)/2)\leq \sum G$.

تخمين (4-2): (Hajiabolhassan, Mehrabadi and Tusserkani, 2000),

لأجل أي بيان G يكون

$$s(G)\leq\lceil(\chi(G)+\Delta(G))/2\rceil.$$

تم إثبات هذا التخمين, عندما G يكون شجرة ومازال مفتوحاً في حالة كون G ليس شجرة.

تمــــــاريـن 4:

1. جد عدد التلوين لرؤوس البيانات التالية:

a. W_{10}, **b.** $P_5 \times P_7$, **c.** $C_4 \times C_4$, **d.** $P_2 \times K_{1,5}$

2. جد عدد الترددات اللأزمة لمحطات راديو بحيث لايقع تصادمات بين بث هذه المحطات مع العلم أنه يحدث تصادم بين تردد محطتين إذا كان البعد بينهما أقل من 100كم. البعد بين تردد المحطات موضح بالجدول التالي:

	A	B	C	D	E	F	G
A		55	110	108	60	150	88
B			87	142	133	98	100
C				77	91	85	93
D					75	114	82
E						107	41
F							123

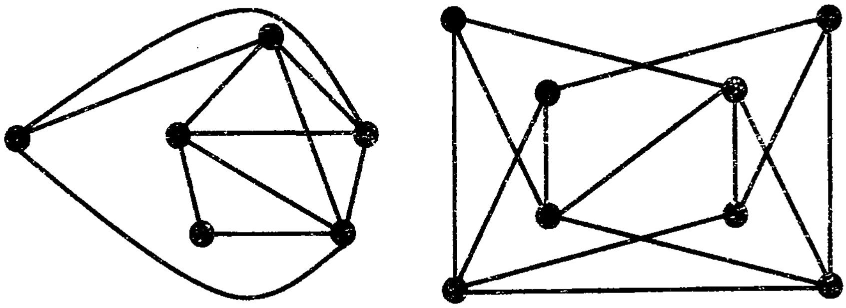
3. ليكن G_1 و G_2 بيانين بسيطين منفصلين, جد $\chi(G_1 \cup G_2)$ و $\chi(G_1+G_2)$ بدلالة $\chi(G_1)$ و $\chi(G_2)$.

4. برهن أن البيان $K_7 - C_7$ ليس 4-حرج.

5. أثبت أن W_p يكون 4-حرج لأجل جميع قيم p الفردية.

6. ليكن G بياناً له عدد لوني $\chi(G)$, عندئذٍ أثبت أن G يحتوي على بيان جزئي حرج G_1 بحيث $\chi(G_1) = \chi(G)$.

7. جد عدد التلوين بحسب خوارزمية بريلز للبيانين (G_1) و (G_2) الموضحين بالشكل التالي:



(G_2) **(G_1)**

8. استخدم خوارزمية بريلز لكتابة برنامج لتلوين البيانين في التمرين (7).

9. أثبت أن حذف رأس أو ضلع من بيان G ينقص عدد التلوين $\chi(G)$ بواحد على الأكثر.

10. جد عدد التلوين لأضلاع البيانات التالية:

a. W_{10}, **b.** $P_5 \times P_7$, **c.** $C_4 \times C_4$,

d. $P_2 \times K_{1,5}$, **e.** petresn graph.

11. ليكن G بياناً نحصل عليه من K_{2p+1} بعد إزالة $(p-1)$ ضلع على الأكثر, أثبت أن $\chi_1(G) = 2p+1$.

12. أثبت أن $\chi_1(K_{m,n}) = \max\{m, n\}$.

13. أثبت أن $\chi_1(W_p) = p$.

14. أثبت أن $\chi_1(Q_p) = p$.

15. أثبت أن $\chi_1(T) = \Delta(T)$.

16. ليكن G_1 و G_2 بيانين حرجين, عندئذٍ يكون $G = G_1 + G_2$ بياناً حرجاً.

17. جد عدد التلوين لأضلاع البيانين (G_1) و (G_2) في التمرين (7), باستخدام الخوارزمية (4-2).

18. استخدم الخوارزمية (4-2) لكتابة برنامج لتلوين البيانين في التمرين (17).

19. برهن المبرهنة (4-11).

20. برهن المبرهنة (4-12).

21. ليكن $G(p, q)$ بيان خريطة مستوية بحيث $\delta(G) \geq 3$, أثبت أن $3R \geq q + 6$.

22. ليكن $G(p, q)$ بيان خريطة مستوية بحيث $\delta(G) \geq 3$. إذا علمت أن $S \geq 12$, أثبت أن G يحتوي على وجه أطوال حدوده لايزيد على أربعة أضلاع.

23. أثبت أن $P(C_p, \lambda) = (\lambda - 1)^p + (-1)^p(\lambda - 1)$.

24. أثبت أن

$$P(K_{s,1};\lambda) = P(K_1;\lambda)(\lambda-1)^s$$

$$P(K_{s,2};\lambda) = P(K_1;\lambda)(\lambda-1)^s + P(K_2;\lambda)(\lambda-2)^s$$

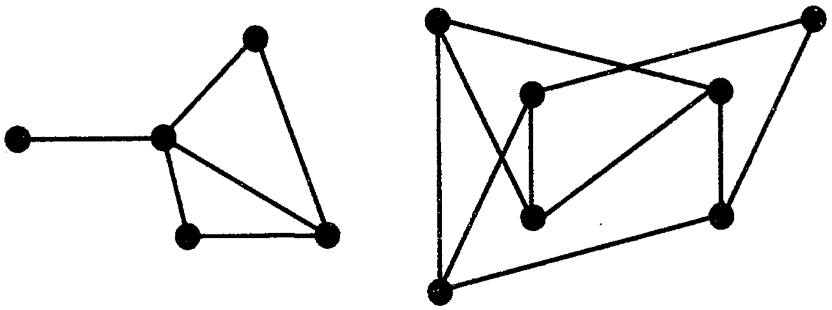
$$P(K_{s,3};\lambda) = P(K_1;\lambda)(\lambda-1)^s + 3P(K_2;\lambda)(\lambda-2)^s + P(K_3;\lambda)(\lambda-3)^s$$

هل يمكن التعميم للحصول على $P(K_{s,r};\lambda)$.

25. جد دالة التلوين للبيان $K_{1,4}$, ثم جد عدد طرق تلوينه من أجل عدد التلوين له $\chi(K_{1,4})$, كذلك من أجل $\chi(K_{1,4}) = 3$ و $\chi(K_{1,4}) = 5$.

26. جد دالة التلوين لبيان بيترسن ثم جد عدد طرق تلوينه من أجل عدد التلوين له $\chi(G)$, كذلك من أجل $\chi(G) = 6$.

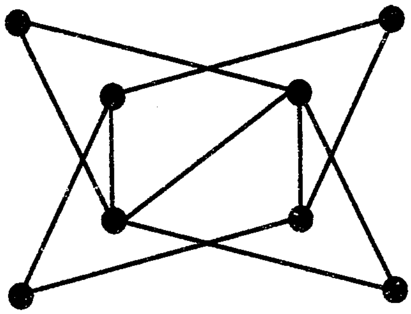
27. جد دالة التلوين لكل من البيانين الموضحين في الشكل التالي, ثم جد عدد طرق تلوين كل منهما من أجل عدد التلوين له $\chi(G)$.



(G_2) (G_1)

28. أثبت أن $\chi(G) \leq s(G)$.

29. جد مجموع عدد التلوين و عدد مجموع التلوين للبيان الموضح في الشكل التالي.



30. جد مجموع عدد التلوين و عدد مجموع التلوين للبيانات التالية:

a. W_9, **b.** $P_3 \times P_6$, **c.** $C_4 \times C_5$,

d. $P_2 \times K_{1,7}$, **e.** petresn graph.

الفصـــل الـــخامس

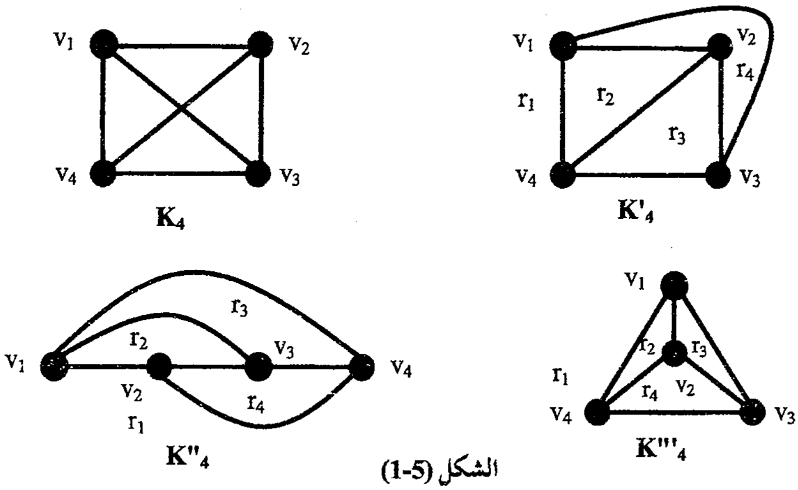
البيانات المستوية

Planar Graphs

ليكن البيان البسيط G(p, q), نقول إن G قابل للغمر (embeddable) في المستوي, إذا أمكن رسمه في المستوي بدون تقاطع بين أضلاعه (أي أن أضلاعه تلتقي في الرؤوس فقط). عندما يكون G(p, q) بياناً مستوياً, فإنه يجزئ المستوي إلى أجزاء تدعى مناطق (region) وأحياناً يطلق عليها أوجه البيان, وتتميز كل منطقة بأنه يمكن أن نصل بين نقطتين فيها بمنحنٍ دون أن يقطع حدود المنطقة والتي هي أضلاع من البيان وبالطبع هذا المنحني لايقطع أي ضلع في البيان. يطلق على المنطقة غير المحدودة بالمنطقة الخارجية والتي تكون محدودة داخلياً بأضلاع البيان. نرمز لعدد مناطق البيان المستوي (الداخلية والخارجية) بـِ r.

مثال (5-1). يمكن رسم البيان K_4 بعدة طرق موضحة في الشكل (5-1).

نلاحظ في الشكل (5-1), أن K_4 يحتوي على تقاطع, بينما K'_4, K''_4, K'''_4 لاتحتوي على تقاطعات وهي تماثل K_4. في الحقيقة رسم واحد على الأقل للبيان بدون تقاطعات في المستوي كافٍ حتى نقول إنه بيان مستوٍ.



الشكل (1-5)

هناك أربع مناطق للبيان المستوي K_4 وعل سبيل المثال مناطق K'_4 هي:

المنطقة الخارجية r_1 محدودة بالأضلاع v_1v_3, v_3v_4, v_4v_1

المناطق الداخلية:

r_2 محدودة بالأضلاع v_1v_2, v_2v_4, v_4v_1

r_3 محدودة بالأضلاع v_2v_3, v_3v_4, v_4v_2

r_4 محدودة بالأضلاع v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1

نلاحظ أنه يمكن رسم البيان K_4 في المستوي بدون تقاطعات بين أضلاعه وبالتالي هو بيان مستوٍ وله أربع مناطق ومنه $r = 4$.

حدود كل منطقة في البيان المستوي G, هي مجموعة أضلاع المسلك المغلق حول هذه المنطقة وعددها يشكل درجة المنطقة ونرمز لها $\deg (r)$. إذا كانت كل المناطق لها نفس الدرجة h, عندئذٍ نسمي G بياناً منتظم المناطق من الدرجة h.

إن البيانات K'_4, K''_4, K'''_4 في الشكل (5-1) منتظمة المناطق من الدرجة 3.

مثال (5-2). ليكن البيان الموضح في الشكل (5-2) ولنجد مناطقه (أوجه البيان) وحدود هذه المناطق. نلاحظ أن

المنطقة الخارجية r_1 محدودة بالأضلاع $v_1v_2, v_2v_8, v_8v_7, v_7v_1$

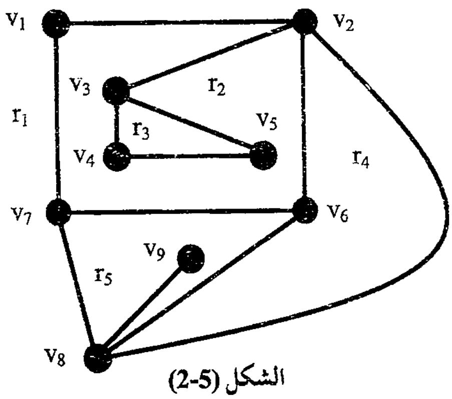
المناطق الداخلية:

r_2 محدودة بالأضلاع $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_3, v_3v_2, v_2v_6, v_6v_7, v_7v_1$

r_3 محدودة بالأضلاع v_3v_4, v_4v_5, v_5v_3

r_4 محدودة بالأضلاع v_2v_6, v_6v_8, v_8v_2

r_5 محدودة بالأضلاع $v_6v_7, v_7v_8, v_8v_9, v_9v_8, v_8v_6$



الشكل (5-2)

نلاحظ أن الضلع v_8v_9 يحسب مرتين حتى نتمكن من تشكيل مسلك مغلق حول المنطقة r_5 وكذلك الضلع v_2v_3 في المنطقة r_2.

واضح أن للبيان G في الشكل (5-2) خمس مناطق ومنه $r = 5$، ولمناطقه الدرجات التالية:

$\deg(r_1) = 4, \deg(r_2) = 9,$
$\deg(r_3) = 3, \deg(r_4) = 3, \deg(r_5) = 5,$

ليس هناك أي خصوصية للمنطقة الخارجية, بسبب إمكانية جعل أي منطقة داخلية في البيان منطقة خارجية وذلك بإعادة رسم البيان بطريقة أخرى مع تبديل مواقع الرؤوس.

(1-5) صيغة أويلر للبيان المستوي (Euler's Formula of Planar Graph).

درس أويلر العلاقة بين عدد الرؤوس, عدد الأضلاع وعدد مناطق البيان وخلص بنتيجة. إذا كان البيان مستوياً فإنه يحقق علاقة معينة, هذه العلاقة تُعرف الآن بصيغة أويلر في البيان المستوي.

مبرهنة صيغة أويلر (1-5) (Euler's Formula ,1758): ليكن $G(p, q)$ بياناً مستوياً مترابطاً له r منطقة, عندئذٍ

$$p - q + r = 2.$$

البرهان: البرهان بطريقة الاستقراء الرياضي على عدد الأضلاع.

إذا كان $q = 0$ عندئذٍ $p = 1$ و $r = 1$ والصيغة صحيحة. لنفرض أن العلاقة صحيحة من أجل جميع البيانات التي لها أضلاع أقل من q حيث $(1 \leq q)$ ولنفرض أن G بيان مستوٍ مترابط له p رأس و q ضلع. إذا كان G شجرة, عندئذٍ $p = q + 1$ و $r = 1$ ومنه نجد $q + 1 - q + 1 = 2$ والصيغة صحيحة. ليكن G بياناً مترابطاً وليس شجرة, وليكن e ضلعاً من G يقع على حلقة. سوف نناقش حالة البيان $G_1 = G - e$. بما أن e ليس جسراً, عندئذٍ G_1 بيان مترابط وهو بيان

مستوٍ بحسب الاستقراء الرياضي عندما يكون عدد الأضلاع أقل من q, بالإضافة إلى ذلك للبيان G_1, p رأس, q -1 ضلع و r -1 منطقة ومنه ينتج أن

$$p - (q - 1) + (r - 1) = 2$$

لكن عند إعادة الضلع e إلى البيان G_1, نحصل على بيان له ضلع ومنطقة زيادة على البيان G_1 وهو بالحقيقة البيان G ومنه بالتعويض في العلاقة السابقة نجد

$$p - q + r = 2.\square$$

بما أن p, q و 2 قيم ثابتة في صيغة أويلر لأي بيان مستوٍ مترابط, عندئذٍ لأجل أي رسمين للبيان في المستوي يكون عدد المناطق في الحالتين هو نفسه.

نقول عن بيان مترابط إنه مستوٍ أعظمي (maximal planar graph), فيما إذا أضيف له ضلع e بين أي رأسين غير متجاورين فيه يصبح بياناً غير مستوٍ. المبرهنة التالية توضح العلاقة بين عدد الأضلاع وعدد الرؤوس في بيان مستوٍ أعظمي مترابط.

مبرهنة (2-5): إذا كان G(p, q) بياناً مستوياً أعظمياً, عندئذٍ

$$q = 3p - 6.$$

البرهان: ليكن r عدد المناطق للبيان G. نلاحظ أن أي منطقة تكون مثلثية الشكل, أي K_3 وأن كل ضلع يقع بين منطقتين فقط. ثم إن مجموع عدد الأضلاع حول كل المناطق هو 3r وحيث إن كل ضلع يشارك مرتين بهذا المجموع ومنه نجد أن $3r = 2q$. بتطبيق صيغة أويلر نحصل على $p - q + 2q/3 = 2$

ومنه ينتج $q = 3p - 6.\square$

نتيجة (5-1): إذا كان $G(p, q)$ بياناً مستوياً, حيث $3 \leq q$, عندئذٍ $q \leq 3p - 6$.

البرهان: يترك للطالب كتمرين.□

نتيجة (5-2): إذا كان $G(p, q)$ بياناً ثنائي التجزئة مستوياً, عندئذٍ $q \leq 2p - 4$.

البرهان: بتطبيق صيغة أويلر ويترك للطالب كتمرين.□

نتيجة (5-3): البيان $K(3, 3)$ بيان غير مستوٍ.

البرهان: بفرض أن $K(3, 3)$ بيانٌ مستوٍ, بما أن $K(3, 3)$ لايحتوي على حلقة C_3 (أي منطقة لها حدود بثلاثة أضلاع), عندئذٍ حدود أي منطقة فيه على الأقل تحوي أربعة أضلاع, مما سبق ينتج

$$4r \leq 2q = 18 \Rightarrow r \leq 4$$

بتطبيق صيغة أويلر نحصل على

$$2 = p - q + r \leq 6 - 9 + 4 = 1$$

وهذا تناقض.□

مبرهنة (5-3): كل بيان مستوٍ يحتوي على رأس من الدرجة 5 على الأكثر, أي أن $\delta(G) \leq 5$.

البرهان: ليكن $G(V, E)$ بياناً مستوياً من المرتبة p والقياس q, حيث $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. إذا كان $p \leq 6$, عندئذٍ ينتج المطلوب. بفرض أن 7

$\le p$, وجميع الرؤوس لها درجة أكبر من 5. لدينا من النتيجة (1-5) q
$\le 3p - 6$ ومنه نحصل على

$$\sum_{i=1}^{p} \rho(v_i) = 2q \le 6p - 12$$

لكن بما أن جميع الرؤوس لها درجة 6 أو أكثر, ينتج أن $6p \le 2q$, وهذا تناقض مع العلاقة السابقة. نستنتج أن G يحتوي على رأس له درجة 5 على الأكثر.□

ليكن البيان المستوي $G(V, E)$, إذا أضفنا رأساً أو عدة رؤوس إلى أي ضلع في هذا البيان فإنه يبقى مستوياً. نقول عن البيانين G_1 ,G, إنهما متكافئان توبولوجياً (homeomorphic) أذا تمكنا من تحويلهما إلى بيانين متماثلين بإضافة رؤوس من الدرجة 2 على أضلاع أي منهما.

مثال (3-5). البيان K_3 مكافئ تبولوجياً للبيان C_p وذلك مهما تكن $3 \le p$.

أوضح كورتوفسكي (Kuratowski's, 1930) الشرط اللازم والكافي للحكم على البيان G, فيما إذا كان مستوياً أو غير مستوٍ من خلال المبرهنة التالية والتي سوف نقبلها بدون برهانها الطويل جداً.

مبرهنة كورتوفسكي (4-5): البيان G يكون مستوياً, إذا وفقط إذا كان لايحتوي بياناً جزئياً يكافئ توبولوجياً $K(3, 3)$ أو K_5.

(2-5) البيان غير المستوي (Nonplanar Graph).

لدراسة البيانات غير المستوية أهمية خاصة بسبب تعرضها لمسألة تقاطع البيانات, ومن أشهر مشاكلها التطبيقية دراسة حلول مشاكل التقاطع في خطوط السير وكذلك تقاطع خطوط الإنتاج وطرق نقل المنتجات في المصانع. ونعرض في هذه الفقرة بإيجاز لمسألة تحليل البيان غير المستوي إلى بيانات مستوية موسعة والذي نطلق عليه سمك البيان.

(1-2-5) عدد التقاطع في البيان (The Crossing Number of Graph).

ليكن البيان $G(V, E)$, نعرف عدد التقاطع (crossing number), $cr(G)$, بأنه أقل عدد من التقاطعات بين أضلاع البيان عند رسمه في المستوي.

هناك أربع شروط لدراسة تقاطع أضلاع البيان هي كالتالي:

a. الضلع لايقطع نفسه.

b. الأضلاع المتجاورة لاتتقاطع.

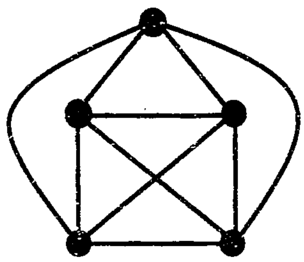
c. يتقاطع ضلعان في نقطة واحدة فقط.

d. لايتقاطع أكثر من ضلعين في النقطة نفسها.

مبرهنة (5-5): $c(K_5) = 1$.

البرهان: من التمرين (5-1), نجد أن K_5 غير مستوٍ ومنه ينتج $1 \leq cr(K_5)$.

لإثبات أن $cr(K_5) \leq 1$, نلاحظ رسم K_5 في الشكل (3-5) بتقاطع وحيد بين أضلاعه. مما سبق نستنتج أن $cr(K_5) = 1$.□



K_5

الشكل (3-5)

مبرهنة (6-5): ليكن $G(p, q)$ بياناً بسيطاً مترابطاً, عندئذٍ

$$cr(G) \geq q - 3p + 6.$$

البرهان: ليكن H بياناً جزئياً موسعاً مستوياً من G بأكبر عدد من الأضلاع, باستخدام النتيجة (1-5) ينتج لدينا $|E(H)| \leq 3|V(H)| - 6$ وهذا يؤدي إلى $|E(H)| \leq 3|V(G)| - 6$ (لأن $|V(H)| = |V(G)|$). بما أن H بيان مستوي أعظمي, عندئذٍ عند إضافة أي ضلع من الأضلاع الباقية $|E(G)| - |E(H)|$ إلي الرسم المستوي للبيان H, فإنه يحدث تقاطعاً واحداً على الأقل. مما سبق نستنتج أن

$$cr(G) \geq |E(G)| - |E(H)| \geq |E(G)| - 3|V(G)| + 6$$

أو

$$cr(G) \geq q - 3p + 6.$$ □

مبرهنة (7-5): ليكن $G(p, q)$ بياناً ثنائي التجزئة بسيطاً ومترابطاً, عندئذٍ

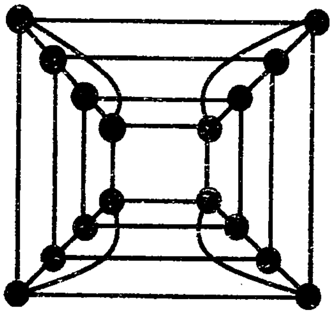
$$cr(G) \geq q - 2p + 4.$$

تخمين (3-5) (Harary and Kainen, 1973): $cr(C_m \times C_n) = (m-2)n$.

مبرهنة (11-5): (Salazar, 1999) لأجل $3 \le m \le 7$ و $m \le n$ يكون

$$cr(C_m \times C_n) = (m-2)\,n.$$

مثال (5-5). لاحظ الشكل (5-5), أن $cr(C_4 \times C_4) = 8$.



$C_4 \times C_4$

الشكل (5-5)

في 2001, (Juarez and Salazar) قدما حداً أدنى لعدد التقاطع لجداء حلقتين من الطول m و n.

نقبل المبرهنات التالية بدون برهان.

مبرهنة (12-5): (Juarez and Salazar, 2001) لأجل $4 \le n$, يكون

$$cr(C_m \times C_n) \ge (m-2)n/2.$$

مبرهنة (13-5): (Beineke and Ringeisen, 2006) لأجل $4 \le n$ يكون

$cr(K_4 \times C_n) = 3\ n.$

مبرهنة (5-14):(Mari**á**n Kle**šč**, 2002)

$cr(K_{2,3} \times C_3) = 9,$
$cr(K_{2,3} \times C_4) \leq 4n.$

تخمين (5-4) (Mari**á**n Kle**šč**, 2002): $cr(K_{2,3} \times C_n) = 4n$.

التخمينات الأربعة مازالت مفتوحه ولم تُثبت إلا في حالات بسيطة جداً.

(5-2-2) سمك البيان (Thickness of Graph)

لتحليل تقاطعات البيان وتحليل الشبكات غير المستوية إلى طبقات وشرائح خالية من التقاطعات, نعرف السمك (Thickness) $\theta(G)$, للبيان البسيط والمترابط $G(p, q)$, بأنه أقل عدد من البيانات الجزئية الموسعة المستوية للبيان G والتي تشكل أضلاعها تجزئة لأضلاع البيان G.
بالتأكيد $\theta(G) = 1$, إذا وفقط إذا كان G بياناً مستوياً.

مبرهنة (5-15): ليكن $G(p, q)$ بياناً بسيطاً مترابطاً, عندئذٍ

$$\theta(G) \geq \lceil q/(3p-6) \rceil.$$

البرهان: من النتيجة (5-1), هناك على الأكثر $3p - 6$ ضلع لبيان جزئي موسع مستوٍ للبيان G وبالتالي ينتج على الأقل $\lceil q/(3p-6) \rceil$ بياناً مستوياً على p رأس.□

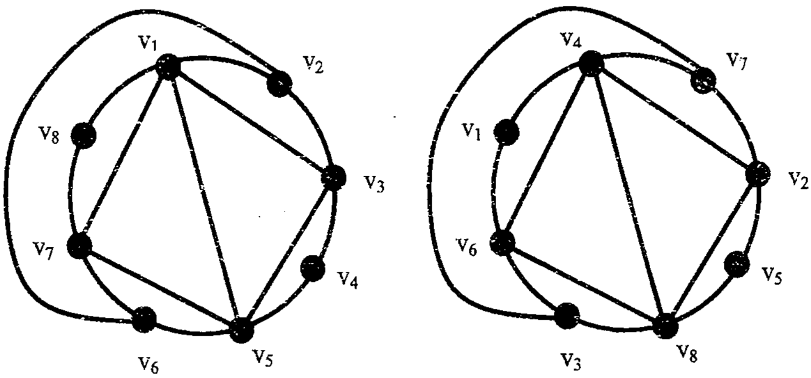
مبرهنة (5-16): ليكن $G(p, q)$ بياناً بسيطاً ثنائي التجزئة مترابطاً, عندئذٍ
$$\theta(G) \geq \lceil q/(2p-4) \rceil.$$

البرهان: من النتيجة (5-2), وبشكل مشابه لبرهان المبرهنة (5-15).□

نعرض للمبرهنات التالية بدون برهان منعاً للأطالة.

مبرهنة (5-17): (Ali, 1983) $\theta(K_p) = \lfloor (p+7)/6 \rfloor ;\ p \neq 9, 10,$
$\theta(K_p) = 3 ;\ p = 9, 10.$

مثال (5-5). لاحظ الشكل (5-5), أن $\theta(K_8) = 2$.



الشكل (5-5)

مبرهنة (5-18): (Ali, 1983) $\theta(K_{m,n}) = \lceil mn/2(m+n-2) \rceil,$
$\theta(Q_p) = \lceil (p+1)/4 \rceil.$

تمـــــــــارين 5:

1. أثبت أن K_5 بيان غير مستوٍ.

2. أثبت النتيجة (5-1).

3. أثبت نتيجة (5-2).

4. إذا كان $G(p, q)$ بياناً بسيطاً مستوياً خالياً من البرازخ والبيانات الجزئية K_3, فأثبت أن $q \leq 2(p-2)$.

5. جد بياناً G بسيطاً مترابطاً مستوياً من المرتبة 8, بحيث يكون البيان المتمم $\overline{G}$ مستوياً أيضاً.

6. أثبت أن الجداء الديكارتي لبيانين غير مستويين هو بيان غير مستو, هل العكس صحيح ؟.

7. باستخدام مبرهنة كورتوفسكي, أثبت أن بيان بيترسن غير مستوٍ.

8. أثبت أن كلاً من $L(K_5)$ و $L(K_{3,3})$ بيان غير مستوٍ.

9. جد بياناً مستوياً لايحوي رأس درجته أقل من 5.

10. لتكن $T(p, q)$ شجرة حيث $p \geq 4$ وليكن $e_1, e_2, e_3 \in \overline{T}$. برهن أن $T + e_1 + e_2 + e_3$ بيان مستوٍ.

11. استخدم مبرهنة كورتوفسكي لإثبات أن K_7 غير مستوٍ.

12. أثبت أن $c(K_{3,3}) = 1$.

13. أثبت أن $c(K_6) = 3$.

14. أثبت أن $c(K_{3,4}) = 2$.

15. ارسم K_7 مع 9 تقاطعات.

16. ارسم $K_{9,9}$ بأقل عدد من التقاطعات.

17. ارسم $C_5 \times C_5$ بأقل عدد من التقاطعات.

18. جد $cr(K_{2,2,2})$ وأرسمه.

19. ارسم $W_4 \times K_2$ بتقاطعين فقط.

20. ارسم ما يلي من البيانات المستوية أو أثبت أنه غير موجود:

a. بيان بسيط من المرتبة 6 والقياس 13.

b. بيان ثنائي التجزئة بسيط من المرتبة 7 والقياس 11.

c. بيان بسيط من المرتبة 144 والقياس 613.

d. بيان ثنائي التجزئة بسيط من المرتبة 36 والقياس 68.

21. ليكن لدينا m من أفران تحميص الفخار في مصنع و n من أرصفة التحميل وبفرض كل فرن يتصل بخط حديدي واحد مع كل رصيف والمطلوب إنشاء هذا المصنع بأقل عدد من التقاطعات بين السكك الحديدية حتى نقلل التصادمات بين العربات. (خذ بعض القيم المختلفة لـ m و n).

22. جد وارسم $\theta(K_{10})$.

23. جد وارسم $\theta(K_{6,6})$.

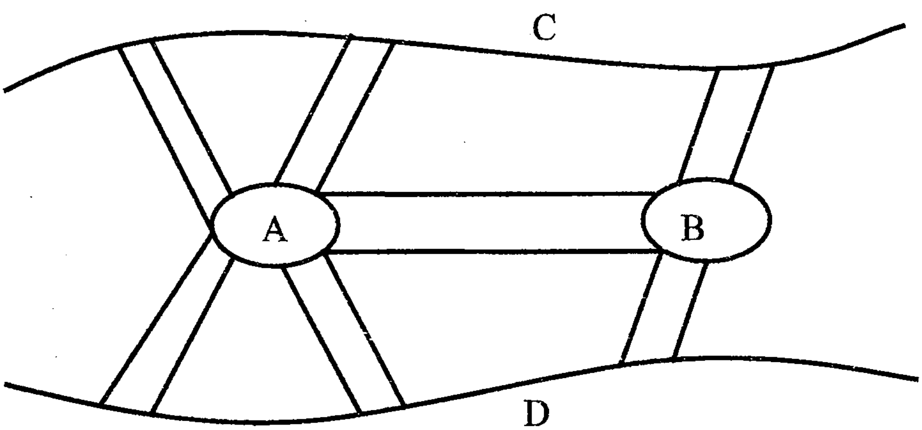
24. جد وارسم $\theta(G)$, حيث G بيان بيترسن.

الفصـــل الســـادس

بيـــانات أولـــر وهاملتـــون

Hamiltonian And Eulerian Graphs

أن أقدم مسألة معروفة في البيانات هي مشكلة الجسور فوق نهر بريجل (Pregel) في مدينة كونيكسبيرك (Königsberg), ألمانيا. مضمون الرواية هو كيف يمكن الانطلاق من نقطة على أجزاء اليابسة A, B, C, D (حيث A, B جزر ضمن النهر و C, D اليابسة على شطي النهر), بحيث نسير على كل الجسور وهي سبعة ثم نعود إلى النقطة نفسها بدون أن نستخدم الجسر نفسه أكثر من مرة وهي كما تظهر في الشكل (6-1).



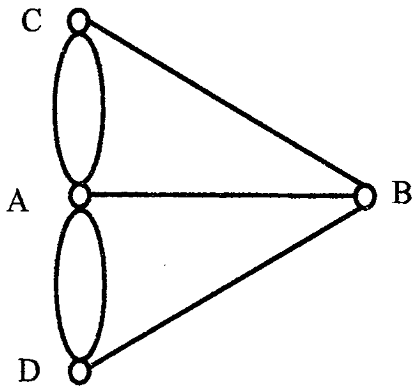
الشكل(6-1). جسر كونيكسبيرك

بعد محاولات عديدة, اعتقد الجميع أن المسألة غير قابلة للحل. في عام 1736, نشر أولر (Leonhard Euler) مايُعتقد أنه أول بحث في نظرية البيان تناول فيه مشكلة جسر كونكسبيرك أو (مشكلة الجسور السبعة كما يطلق عليها أحياناً). لاحظ أولر أن حل المسألة يعتمد على عدد الجسور المتعلقة بكل منطقة من المناطق الأربعة في اليابسة. بمعنى أخر, من أجل الدخول والخروج من وإلى كل منطقة يلزمنا جسرين وبالتالي يلزم عدد زوجي من الجسور إلى كل منطقة ومنها على اليابسة بحيث لانستخدم الجسر أكثر من مرة واحدة.

(1-6) بيانات أولر (Eulerian Graph).

البيان البسيط هو بيان يحتوي على الأكثر ضلعاً واحداً بين كل رأسين متمايزين. البيان المضاعف (multigraph), هو بيان يمكن أن يحتوي أكثر من ضلع بين أي رأسين مختلفين.

نعرف الآن بيان أولر (eulerian graph) بأنه بيان يحتوي دورة (circuit) تمر بجميع أضلاعه وهذه الدورة تسمى دورة أولرية. البيان الذي لايحتوي دورة أولرية ويحتوي رحلة (trial) تمر بجميع أضلاعه, نسميه بيان شبه أولري (semi-Eulerian) ونسمي هذه الرحلة برحلة أولرية. حول أولر جسر كونسيبرك إلى النموذج البياني التالي:



الشكل(6-2) البيان المضاعف لجسر كونكسييرك

والسؤال ماهي الشروط الواجب تحققها في بيان حتى يحتوي دورة تمر بجميع أضلاعه. درس أولر الشروط الازمة لاحتواء بيان على دورة أولرية أو رحلة أولرية. بمعنى أن يكون البيان أولري أو شبه أولري. ومن تطبيقات بيانات أولر ترميز الاتصالات, في البرامج التي تعمل بالتوازي ولعبة الدومينو.

مبرهنة (6-1) أولر (Euler, 1736): يكون البيان المترابط G, بيان أولر, إذا وفقط إذا كان كل رأس في G له درجة زوجية.

البرهان: $\Leftarrow$: في كل مرور بالرأس v, هناك يكون دخول وخروج منه وبالتالي هناك عدد زوجي من الأضلاع التي تقع على v. بالنسبة لرأس البداية, يتم الانطلاق منه ثم العودة إلية في نهاية الرحلة وبالتالي له درجة زوجية.

$\Rightarrow$: بسهولة نجد إمكانية تجزئة أضلاع البيان إلى حلقات وذلك لأن لكل رأس درجة زوجية. كل حلقة من الحلقات السابقة تشارك بدرجتين من درجات الرأس

الزوجية مع حلقة أخرى وبالتالي مع G. ليكن هناك k حلقة من أضلاع البيان. سوف نثبت أن G بيان أولر بطريقة الاستقراء على k. إذا كان $k = 1$ فالبيان أولري وعندما $k = 2$, فإن الحلقتين تشتركان برأس v له درجة 4, باستخدام هذا الرأس في بداية الرحلة ثم المرور بأضلاع الحلقة الأولى إلى v ومن ثم نمسح أضلاع الحلقة الثانية والعودة إلى نفس الرأس v. أي أن G بيان أولري.

لنفرض أن المبرهنة صحيحة من أجل جميع عدد الحلقات والتي أقل من k ولنثبت صحتها من أجل k. لتكن الحلقات $C_1, C_2, \ldots, C_k$. من الفرض أن البيان G_1 المكون من الحلقات $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}$, هو بيان أولري لأن درجة كل زوجية. على الأقل هناك رأس u مشترك بين الحلقة C_k والبيان G_1 وله درجة زوجية. الآن, نستخدم هذا الرأس كبداية رحلة في البيان G_1 ثم نعود إليه ونجتاز أضلاع C_k وفي النهاية نعود إلى u. ومنه نجد أن البيان أولري مهما كان عدد الحلقات.□

يمكن صياغة المبرهنة التالية والتي نوردها بدون برهان.

مبرهنة (6-2): (Gould, 1988) ليكن G بياناً مترابطاً, عندئذٍ الحالات التالية متكافئة:

1. البيان G يحتوي دورة أولرية.
2. لكل رأس في G درجة زوجية.
3. يمكن تجزئة مجموعة الأضلاع في G إلى حلقات.□

نتيجة (6-1): يكون البيان المترابط G, بياناً شبه أولري, إذا وفقط إذا كان يحتوي على الأكثر رأسين من الدرجة الفردية.

البرهان: يترك البرهان كتمرين للطالب.□

خوارزمية (1-6) فلوري (Fleury's Algorithm).

المعطيات : $G(V, E)$ بيان مترابط من الرتبة p والقياس q.

المخرجات : دورة أولرية C للبيان G.

الطريقة : تمديد C_i بحيث لايحتوي البيان $G - C_i$ على جسر, إلا إذا لم يبقَ هناك اختيار أخر.

<u>خطوات الخوارزمية:</u>

1- اختر أي رأس v_0 في G وضع $C = v_0$, و $i := 0$.

2- بفرض حصلنا في اختيارنا على الرحلة $C_i = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_i, v_i$.

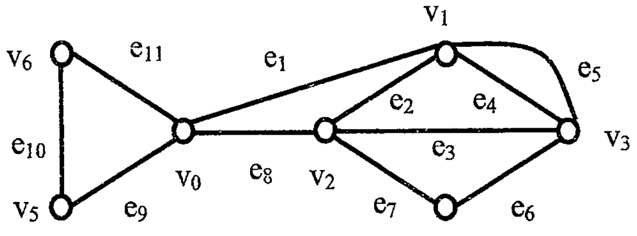
1.2- في v_i, اختر أي ضلع e_{i+1} يجاور e_i, لاينتمي إلى C_i وبحيث لايكون جسراً في البيان $G_i = G - E(C_i)$, مالم يكن هناك اختيار أخر.

2.2- ضع $C_{i+1} = C_i, e_{i+1}, v_{i+1}$.

3.2- ضع $i := i + 1$.

3- إذا كان $i = q$, عندئذٍ توقف ويكون $C = C_i$, وإلا اذهب إلى 2.

مثال (1-6): استخدم خوارزمية فلوري, لإيجاد دورة أولرية في البيان الموضح في الشكل (3-6).



الشكل(3-6)

الحل:

1- اختر أي رأس v_0 في G وضَع $C = v_0$, و $i := 0$.

2- لدينا الرحلة $C_i = v_0$.

1.2- في v_0, نختار الضلع e_{0+1} يجاور أولاً v_0, لاينتمي إلى C_0 وبحيث لايكون جسراً في البيان $G_0 = G - E(C_0)$.

2.2- ضع $C_1 = C_0, e_1, v_1$.

3.2- ضع $i := 0 + 1$.

3- هل $i = 1 = q = 11$, كلا, اذهب إلى 2.

....

2- لدينا الرحلة $C_1 = v_0, e_1, v_1$.

1.2- في v_1, نختار الضلع e_{1+1} يجاور v_1, لاينتمي إلى C_1 وبحيث لايكون جسراً في البيان $G_1 = G - E(C_1)$.

2.2- ضع $C_2 = C_1, e_2, v_2$.

3.2- ضع $i := 1 + 1$.

3- هل $i = 4 = q = 11$, كلا, اذهب إلى 2.

....

2- لدينا الرحلة $C_4 = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_1$.

1.2- في v_1, نختار الضلع $e_{4+1} = v_1v_3$ يجاور v_1, لاينتمي إلى C_4 وبحيث لايكون جسراً في البيان $G_4 = G - E(C_4)$.

2.2- ضع $C_5 = C_4, e_5, v_3$.

3.2- ضع $i := 4 + 1$.

3- هل $i = 5 = q = 11$, كلا, اذهب إلى 2.

....

بتتابع نفس الخطوات السابقة وتحت الشروط في الخطوة (1-2 ,2) نجد دورة أولرية للبيان بالشكل التالي:

$C_5 = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_1, e_5, v_3$

$C_6 = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_1, e_5, v_3, e_6, v_4$

$C_7 = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_1, e_5, v_3, e_6, v_4, e_7, v_2$

$C_8 = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_1, e_5, v_3, e_6, v_4, e_7, v_2, e_8, v_0$

$C_9 = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_1, e_5, v_3, e_6, v_4, e_7, v_2, e_8, v_0, e_9, v_5$

$C_{10} = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_1, e_5, v_3, e_6, v_4, e_7, v_2, e_8, v_0, e_9, v_5, e_{10}, v_6$

$C_{11} = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_1, e_5, v_3, e_6, v_4, e_7, v_2, e_8, v_0, e_9, v_5, e_{10}, v_6, e_{11}, v_0$

3- هل $i = 2 = q = 11$, كلا, اذهب إلى 2.

....

2- لدينا الرحلة $C_2 = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2$.

1.2- في v_2, نختار الضلع e_{2+1} يجاور v_2, لاينتمي إلى C_2 وبحيث لايكون جسراً في البيان $G_2 = G - E(C_2)$.

2.2- ضع $C_3 = C_2, e_3, v_3$.

3.2- ضع $i := 2 + 1$.

3- هل $i = 3 = q = 11$, كلا, أذهب إلى 2.

....

2- لدينا الرحلة $C_3 = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3$.

1.2- في v_3, نختار الضلع $e_{3+1} = v_3v_4$ يجاور v_3, لاينتمي إلى C_3, لكن $e_4 = v_3v_4$ جسر في البيان $G_3 = G - E(C_3)$, لذلك لايمكننا اختياره. إذاً, نلغي هذه الخطوة ونذهب إلى 2.

....

2- لدينا الرحلة $C_3 = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3$.

1.2- في v_3, نختار الضلع $e_{3+1} = v_3v_1$ يجاور v_3, لاينتمي إلى C_3 وبحيث لايكون جسراً في البيان $G_3 = G - E(C_3)$.

2.2- ضع $C_4 = C_3, e_4, v_1$.

3.2- ضع $i := 3 + 1$.

3- هل $i = 11 = q = 11$, نعم, عندئذٍ $C = C_{11}$ وهي الدورة الأولرية المطلوبة للبيان في الشكل (6-3).

....

يجب أن نلاحظ وجود دورة أخرى للبيان في الشكل (6-3) لها الأضلاع نفسها ولكن بترتيب آخر.

(6-2) سلسلة ديبرويجن ومشكلة ساعي البريد

.(DeBruijn Sequences and Postman Problems)

من تطبيقات بيان أولر هو اختيار الطريق الأمثل في رحلة التجوال. ونعلم أن رحلة التجوال ترتبط باختيار جهة السير من مكان إلى آخر وهذا ينتج عنه بيان موجه. من بين أهم مشاكل التجوال المتكرر هو الرحلة اليومية لساعي البريد والتي سنحاول دراستها التطبيقية على بيانات أولر بطريقة السلاسل الرمزية.

لتكن المبرهنة التالية والتي يصف أولر من خلالها البيان الموجه الذي يحتوي على دورة أولرية موجهة.

نقبل المبرهنة التالية بدون برهان.

مبرهنة (6-3) (Eulerian–Digraph): ليكن D بياناً موجهاً مترابطاً, عندئذٍ الحالات التالية متكافئة:

1. البيان D, بيان أولري.

2. لكل رأس v في D، $id(v) = od(v)$.

3. يمكن تجزئة مجموعة الأضلاع $E(D)$ في D إلى حلقات موجهة.□

مبرهنة (6-4): (Chartrand and Lesniak, 1986) البيان الموجه D، يحتوي رحلة من الرأس v إلى الرأس u إذا وفقط إذا كان $od(u) = id(v) + 1$، $id(u) = od(v) + 1$ ولكل الرؤوس الأخرى باستثناء v, u تتساوى الدرجة الداخلية مع الدرجة الخارجية.

نسمي السلسلة الرمزية بالعناصر 0, 1 (الترقيم الثنائي) ومن الطول 2^n، سلسلة (2, n)–ديبرويجن ((2, n)-deBroijn)، إذا كانت تحوي كل الإمكانيات للسلاسل الرمزية الجزئية بالعناصر 0, 1 من الطول n لمرة واحدة فقط، وبطريقة دورانية. أي سوف يظهر بها 2^n سلسلة رمزية من الطول n.

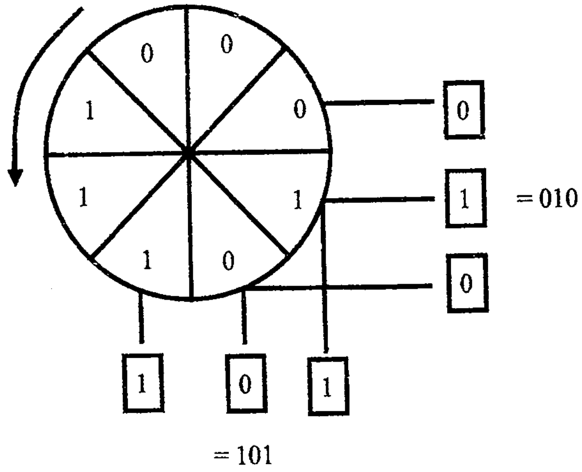
مثال (6-2): لتكن السلاسل الرمزية التالية:

01, 0110, 01110100, 0000100110101111

السلاسل الرمزية السابقة التالية هي سلاسل (2, n)– ديبرويجن وذلك عندما n = 1, 2, 3, 4 على الترتيب. حيث إنه إذا كان n = 1، فإن $2^1 = 2$ وبالتالي السلسلة 01 هي سلسلة (2, 1)– ديبرويجن وهي تحوي سلسلتين رمزيتين جزئيتين مختلفتين من الطول 1، هما 0 و 1.
عندما n = 2، فإن $2^2 = 4$ والسلسلة 0110 هي سلسلة (2, 2)– ديبرويجن وهي تحوي أربع سلاسل رمزية جزئية مختلفة من الطول 2، بالطبع نأخذها بشكل

دوراني من بداية السلسلة إلى النهاية, ثم من النهاية إلى البداية بشرط عدم تكرار السلاسل الجزئية. وبالتالي السلاسل الجزئية هي 00 ,10 ,11 ,01.

يمكن للطالب التأكد من أن السلاسل الرمزية الباقية لأجل $n = 3, 4$, تشكل سلسلة $(2, 3)$– ديبرويجن و $(2, 4)$–ديبويجن على الترتيب. لاحظ الشكل (4-6), يمثل توضيحاً لطريقة إيجاد السلاسل الرمزية الجزئية من الطول 3 لسلسلة رمزية من الطول $2^3 = 8$, وحيث الاتجاه بعكس حركة عقارب الساعة.



الشكل (4-6)

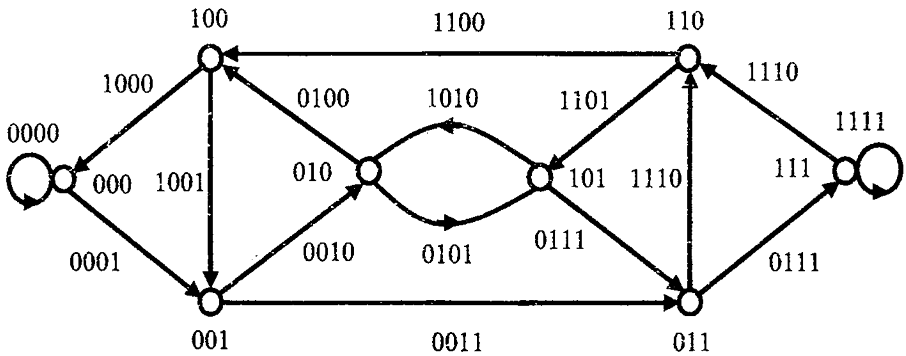
يمكن تعميم تعريف $(2, n)$– ديبرويجن إلى أي عدد صحيح موجب p, بحيث ينتج لدينا (p, n)–سلسلة من الطول p^n يمكن تجزئتها إلى p^n سلسلة جزئية مختلفة من الطول n وبنفس الطريقة السابقة.

نعرف البيان الموجه $(2, n)$– ديبرويجن $D_{2, n}$ من الرتبة 2^{n-1}, ومُرمز الرؤوس بسلاسل رمزية ثنائية الترقيم 0, 1 من الطول $n - 1$, وله 2^n قوس مُرمزة

بسلاسل رمزية ثنائية الترقيم 1 ,0 من الطول n. القوس الموجه من الرأس $b_1b_2\ldots b_{n-1}$ إلى الرأس $b_2\ldots b_{n-1}\,b_n$, يأخذ الترميز $b_1b_2\ldots b_{n-1}\,b_n$.

مثال (3-6): البيان الموجه (4 ,2)– ديبرويجن $D_{2,4}$ من الرتبة $8 = 2^{4-1}$, ومُرمز الرؤوس بسلاسل رمزية ثنائية الترقيم 1 ,0 من الطول 3 = 1- 4, وله $16 = 2^4$ قوس مُرمزة بسلاسل رمزية ثنائية الترقيم 1 ,0 من الطول 4.

نلاحظ القوس الموجه من الرأس 000 إلى الرأس 001, يأخذ الترميز 0001. أي أن الرمزين الثاني والثالث من الرأس الأول يتطابقان مع الرمزين الأول والثاني في الرأس الثاني ثم نضيف الرمز الأول من الرأس الأول والرمز الثالث من الرأس الثاني وكأنه تركيب لسلسلتين رمزيتين من الطول 3 لرأسين, للحصول على سلسلة رمزية من الطول 4 للقوس الذي يصل بينهما. أي نحصل على سلسلة لترميز الأقواس في $D_{2,4}$ وهذا المبدأ هو الشرط لوجود قوس من رأس إلى آخر. لاحظ الشكل (6-5) لتوضيح البيان الموجه (4 ,2)– ديبرويجن $D_{2,4}$.



الشكل (6-5). البيان الموجه (4 ,2)– ديبرويجن $D_{2,4}$

الطريقة السابقة المستخدمة في بناء البيان الموجه $(2, 4)$- ديبرويجن $D_{2,4}$, تفيد في تتبع الدورة الأولرية الموجهة في البيان $D_{2,4}$ أو أي بيان موجه $(2, n)$- ديبرويجن $D_{2, n}$, حيث في البيان $D_{2, n}$ يكون بين الرأسين $a_1a_2 \ldots a_{n-1}$ و $b_1b_2 \ldots b_{n-1}$ قوس من $a_1a_2 \ldots a_{n-1}$ إلى $b_1b_2 \ldots b_{n-1}$ إذا كانت السلسلتان الرمزيتان الجزئيتان $a_2 \ldots a_{n-1} = b_1b_2 \ldots b_{n-2}$ وعندئذٍ يأخذ القوس الترميز $a_1a_2 \ldots a_{n-1}b_{n-1}$.

هذه الدورة المرمزة كانت ثمرة الرياضي الهولندي ديبرويجن لحل مشكلة ساعي البريد المتجول حيث رمز لمواقع صناديق البريد بسلاسل رمزية ثنائية من الطول $n -1$ وللشوارع التي سيسلكها الساعي بسلاسل رمزية ثنائية من الطول n.

يجب ملاحظة أن كل قوس من أقواس البيان له سلسلة رمزية من الطول n تختلف عن أي سلسلة رمزية تخص قوساً أخر, أي لايوجد قوسان لهما السلسلة الرمزية نفسها. بالطبع اختلاف ترميز الأقواس يضمنه اختلاف ترميز الرؤوس.

مبرهنة (6-5): البيان الموجه $(2, n)$-ديبويجن $D_{2, n}$, هو بيان أولري.

البرهان: البيان ديبويجن $D_{2, n}$ هو بيان موجه متصل بقوة, لأنه إذا كان $a_1a_2 \ldots a_{n-1}, b_1b_2 \ldots b_{n-1}$ أي رأسين في $D_{2, n}$, عندئذٍ سلسلة الرؤوس

$$a_1a_2 \ldots a_{n-1}, a_2 \ldots a_{n-1}b_1, a_3 \ldots a_{n-1}b_1b_2, \ldots, b_1b_2 \ldots b_{n-1}$$

تعرف رحلة موجهة من الرأس $a_1a_2 \ldots a_{n-1}$ إلى الرأس $b_1b_2 \ldots b_{n-1}$. بالإضافة إلى ذلك, لأجل كل رأس $b_1b_2 \ldots b_{n-1}$ من $D_{2, n}$, الأقواس الخارجة منها هي فقط

القوسان $b_1b_2\ldots b_{n-1}0$ و $b_1b_2\ldots b_{n-1}1$, والأقواس الداخلة أليها هي فقط القوسان $0b_1b_2\ldots b_{n-1}$ و $1b_1b_2\ldots b_{n-1}$. ينتج من ذلك أن

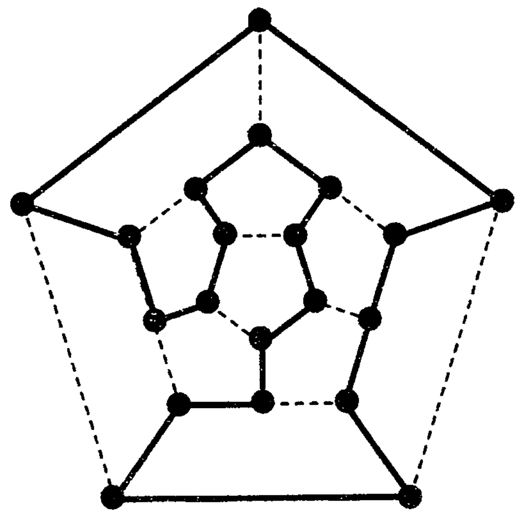
$$id(b_1b_2\ldots b_{n-1}) = od(b_1b_2\ldots b_{n-1}) = 2$$

الآن, من المبرهنة (6-3), نستنتج أن $D_{2,n}$ بيان أولري.□

(6-3) بيانات هاملتون (Hamiltonian Graphs).

في الفقرات السابقة من هذا الفصل كانت دراستنا لكيفية إيجاد دورة (رحلة) تعبر كل ضلع في البيان ولمرة واحدة فقط. السؤال الآن, كيف يمكن إيجاد حلقة (مسار) في البيان تمر بكل رأس ولمرة واحدة فقط.

في 1865, وليم هاملتون (William Hamilton) أرسل إلى صديقه لعبة على شكل قطعة خشبية مجسمة لها 12 وجه (منطقة) منتظم وعلى حدود الأوجه 20 مدينة الأهم في المملكة المتحدة والطرق الواصلة بين هذه المدن هي حدود الأوجه والذي أطلق عليه الأثنى عشر وجه (dodecahedron), لاحظ الشكل (6-6). وسأله في الرسالة فيما إذا كان بإمكانه إيجاد مسار مغلق بحيث ينطلق من إحدى المدن ويزور كل المدن ثم يعود إلى المدينة نفسها.



الشكل (6-6)

نسمي الحلقة التي تنطلق من أحدى المدن وتمر بجميع المدن الباقية ثم تعود إلى مدينة البداية بحلقة هاملتون (hamiltonian cycle) وعليه نعرف بيان هاملتون (hamiltonian graph), بأنه بيان يحتوي على حلقة هاملتونية تمر بجميع رؤوسه. البيان الذي لايحتوي حلقة هاملتونية ويحتوي مساراً يمر بكل الرؤوس نسميه بياناً شبه هاملتوني (semi- hamiltonian) ونسمي المسار عندئذٍ مساراً هاملتونياً (hamiltonian path). أصغر حلقة بعدد الرؤوس في البيان G, تسمى خصر (girth) البيان.

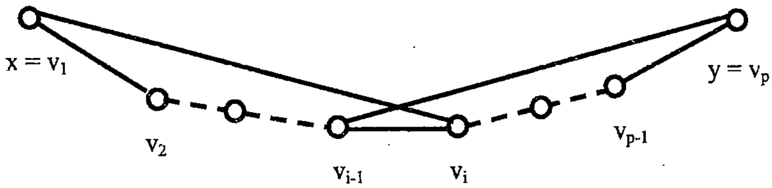
مبرهنة (6-6) (Ore, 1960): ليكن البيان G(p, q) حيث $3 \leq p$, إذا كان لأجل كل رأسين غير متجاورين x, y يكون $p \leq deg(x) + deg(y)$, عندئذٍ G بيان هاملتون.

البرهان: بطريقة نقض الفرض, لنفرض أنها غير صحيحة. عندئذٍ لنفرض وجود أكبر بيان يحقق شروط المبرهنة من الرتبة $p \geq 3$, و غير هاملتوني. البيان G غير هاملتوني ويحتوي رأسين x, y غير مِتجاورين, عندئذٍ G + xy يكون هاملتوني. بما أن $p \geq 3$, G غير تام.

الآن, لنناقش البيان $H = G + xy$. H بيان هاملوني وكل حلقة هاملتونية فيه يجب أن تحوي الضلع xy. نستنتج أن G يحتوي مساراً x-y هاملتونياً, وليكن $P : x = v_1, v_2, \ldots, v_p = y$. نلاحظ أنه, إذا كانت $v_i \in N(x)$, عندئذٍ $v_{i-1} \notin N(y)$ وإلا فإن متتالية الرؤوس

$$v_1, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_p, v_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, v_1$$

تشكل حلقة هاملتونية. لاحظ الشكل (6-7). إذن, لكل رأس مجاور إلى x يوجد رأس من $V(G) - \{y\}$ لايجاور y. ومنه نجد $\deg(y) \leq (p-1) - \deg(x)$ وبالتالي $\deg(x) + \deg(y) \leq p-1$ وهذا يناقض الفرض. نستنتج أن المبرهنة صحيحة.□



الشكل (6-7)

نتيجة (6-2) (Dirac): ليكن البيان $G(p, q)$ حيث $p \geq 3$, إذا كان $\delta(G) \geq p/2$, عندئذٍ G بيان هاملتون.

البرهان: ينتج مباشرةً من المبرهنة (6-6).□

مبرهنة (6-7) (Bondy & Chvátal): ليكن البيان $G(p, q)$, و x, y رأسين غير متجاورين بحيث إن $p \leq deg(x) + deg(y)$. عندئذٍ $G + xy$ بيان هاملتون, إذا وفقط إذا كان G هاملتوني.

البرهان: إذا كان G هاملتوني, عندئذٍ $G + xy$ هاملتوني.
العكس: إذا كان $G + xy$ هاملتوني و G غير هاملتوني, عندئذٍ بتطبيق المبرهنة (6-6) نحصل على تناقض.□

مبرهنة (6-8): Q_p بيان هاملتون مهما يكن $2 \leq p$.

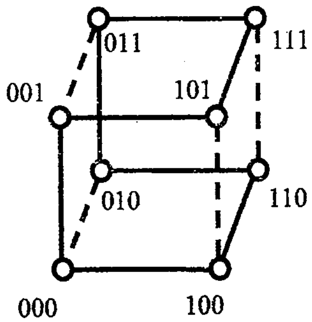
البرهان: بالإستقراء, واضح أن Q_2 بيان هاملتون. بفرض أن

$$b_1, b_2, \ldots, b_{2^p}, b_1$$

حلقة في Q_p. عندئذٍ

$$b_10, b_20, \ldots, b_{2^p}0, b_{2^p}1, b_{2^p-1}1, \ldots, b_11, b_10$$

تكون حلقة في Q_{p+1}. ومنه نستنتج أن Q_p بيان هاملتون مهما يكن $2 \leq p$.□



الشكل (6-8) حلقة هاملتون في Q_3

نقول عن البيان $G(p, q)$ إنه بيان شامل الحلقات (pancyclic) إذا كان يحتوي كل حلقة من الطول m حيث $3 \leq m \leq p$.

مبرهنة (6-9): (Gould, 1988) إذا كان $G(p, q)$ بيان هاملتون بحيث $p^2/4 \leq q$, عندئذٍ, إما أن يكون G شامل الحلقات أو يكون p زوجياً و G يماثل $K_{(p/2, p/2)}$.

(6-4) بيانات هاملتون الموجهة (Hamiltonian Digraphs).

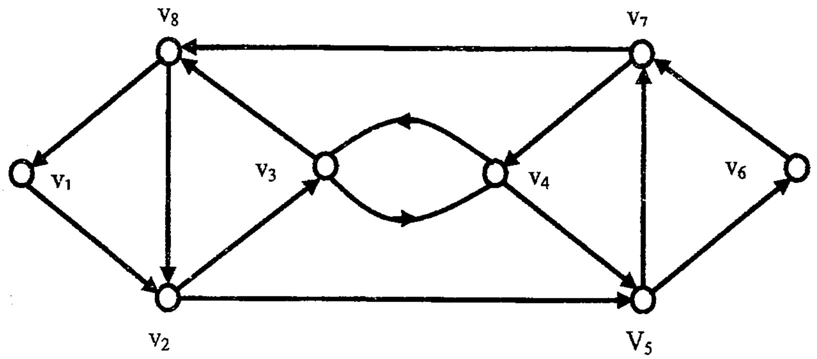
نعلم أن دراسة البيانات الموجهة بشكل عام أكثر تعقيداً من دراسة البيانات غير الموجهة. سوف نتعرض في هذه الفقرة لدراسة بيانات هاملتون الموجهة. كما أن لبيانات هاملتون الموجهة تطبيقات أكثر مما هي في البيانات غير الموجهة.

عرفنا سابقاً الدرجة الداخلية للرأس v في البيان الموجه ورمزنا له $id(v)$ ولدرجته الخارجية $od(v)$, كذلك درجة الرأس v هي مجموع الدرجتين الداخلية والخارجية $deg(v) = id(v) + od(v)$.

مثال (6-4): البيان الموجه في الشكل (6-9) يحتوي الحلقة الموجهة

$$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_1$$

وهي تمر بجميع رؤوسه ولمرة واحدة, إذن هو بيان موجه هاملتوني.



الشكل (6-9)

سوف نعرض للمبرهنة التالية لموينيل والتي نوردها بدون برهان بسبب طوله.

مبرهنة (6-10) (Meyniel): ليكن البيان D(V, A) متصلاً بقوة من الرتبة p. إذا كان $2p - 1 \leq deg(x) + deg(y)$, لأجل كل رأسين غير متجاورين x, y عندئذٍ D بيان هاملتون.

مبرهنة (6-11) (Woodall): ليكن البيان D(p, q) حيث $3 \leq p$, إذا كان لأجل كل رأسين x, y حيث $xy \notin A(D)$, يكون $p \leq od(x) + id(y)$, عندئذٍ D بيان هاملتون.

البرهان: لنثبت أولاً أن شرط الدرجة يؤدي إلى أن البيان متصل بقوة. ليكن v, u رأسين في D, سوف نثبت أنه يمكن الوصول إلى u من v. إذا كان $vu \in A(D)$, فإنه واضح إمكانية الوصول إلى u من v. إذا $vu \notin A(D)$, فإن شرط الدرجة يحتم

وجود رأس w بحيث إن $vw\in A(D)$ و $wu\in A(D)$ وبالتالي يمكن الوصول إلى u من v والبيان D متصل بقوة.

الآن نطبق المبرهنة (6-10). ليكن x, y رأسين غير متجاورين في D, عندئذٍ $p \le od(x) + id(y)$ و $p \le od(y) + id(x)$. إذن, $2p \le deg(x) + deg(y)$ وبالتالي المبرهنة (6-10) تحقق المطلوب.□

تخمين (6-1) (Jackson, 1981): ليكن البيان D k-بياناً موجهاً منتظماً من الرتبة 4k +1 على الأكثر (حيث $(k \ne 2)$. عندئذٍ يحتوي D, حلقة موجهة هاملتونية.

تخمين (6-2) (Häggkvist, 1993): ليكن البيان D(p, q) بياناً موجهاً, بحيث $(3p - 2)/8 \le od(v)$ مهما تكن $v\in V(D)$. عندئذٍ يحتوي D, حلقة موجهة هاملتونية.

(6-5) مشكلة البائع المتجول (Traveling Salesman Problem, TSP).

مسألة البائع المتجول (Traveling Salesman Problem) والتي يرمز لها اختصاراً (TSP), هي أقل مجموع من المسافات لتجوال بائع متجول (أو سائح) على p مدينة بشرط أن يزور كل مدينة لمرة واحدة فقط ثم يعود إلى المكان الذي انطلق منه. يمكن مناقشة المسألة على أن تكون دراسة لأقل مسافة يقطعها,

في زمن يستغرقه أو كلفة يدفعها المتجول. بكل الأحوال لدينا وزن بين كل مدينتين يمكن الانتقال بينهما. ليس بالضرورة أن يكون الاتصال بين كل مدينتين ممكناً. نلاحظ أن المسألة تؤول إلى بيان موزون والمطلوب إيجاد أصغر وزن لحلقة هاملتونية تمر بكل الرؤوس.

للمسألة TSP, تاريخ طويل مشوق للدراسة والبحث. أقدم دراسة في هذا المجال تعود إلى عام 1759, عندما نشر أولر حل لمسألة تجوال فارس على حصان. ثم توالت الدراسات حول مسألة التجوال وإيجاد أقل كلفة (الكلفة هنا تعني طول, زمن أو تكلفة بجميع صنوفها) للمناطق الواجب زيارتها تحت شرط الزيارة لمرة واحدة لكل منطقة. لقد تعرض لها كل من (A. T. Vandermonde, 1771), (T. p. Kirkman, 1856) و (W. R. Hamilton, 1856).

مسألة إيجاد أصغر حلقة هاملتونية لبيان, ظهرت للدراسة كصياغة لمسألة TSP, عام 1936 من قبل العالم وايتني (H. Whitney) ومن ثم آخرون. في عام 1980, (Crowder and Padberg) قدموا حل أمثل لمسألة TPS على عينة مكونة من 318 مدينة وأستغرق الحاسوب 6 دقائق لإيجاد الرحلة الهاملتونية المثلى للعينة التي درسها. حيث من المعلوم أن مسألة TSP هي من النوع (NP –hard). في 1976, أوضح كل من بوندي و تشفاتل (Bondy & Chvátal) أن إيجاد حلقة هاملتونية في البيان G(V, E) هي من التعقيد $|V|^3$.

ليكن G(p, q) بياناً موزون الأضلاع, له الرؤوس $v_1, \ldots, v_p$. ليكن c_{ij} وزن الضلع v_iv_j. عندئذٍ نقول إن G يحقق المتراجحة المثلثية إذا كان

وذلك لأجل كل الرؤوس i, j, k, حيث إن الرؤوس v_i, v_j, v_k $c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj}$ تشكل C_3. الآن, نقدم لخوارزمية إيجاد أقصر (أصغر) حلقة هاملتونية لبيان, تمثل رؤوسه مناطق (مواقع ...) هدف الزيارة لبائع متجول (أو سائح ...) وتمثل أضلاعه المسافة (أو التكلفة ...) بين المناطق.

خوارزمية (6-2) الإقحام الأقصر (The Shortest Insertion Algorithm).

المعطيات : $G(V, E)$ بيان موزون من الرتبة p يحقق شرط المتراجحة المثلثية للمسافة.

المخرجات : حلقة هاملتونية C (حلقة التجوال للبائع المتجول).

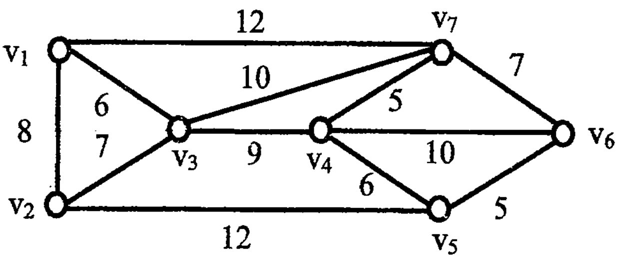
خطوات الخوارزمية:

1- اختر أي رأس v في G وضع $C = v_1$, و $i := 1$.

2- إذا كان $i = p$, توقف, لأن $C = C_p$, وتكون C الحلقة المطلوبة.
وإلا, إذا كانت C_i $(1 \leq i < p)$ حلقة مختارة, عندئذٍ تجد رأس v_i لاينتمي إلى C_i يكون الأقرب لرأسين متتاليين w_i, w_{i+1} في C_i.

3- لتكن C_{i+1} الحلقة الناتجة من إقحام v_i بين w_i و w_{i+1} في C_i. اذهب إلى الخطوة 2.

مثال (6-5): استخدم الخوارزمية (6-2), لإيجاد أصغر حلقة هاملتونية للبيان الموزون الموضح في الشكل (6-10).



الشكل(6-10)

الحل:

1- ليكن v_1 رأس البداية في G, نضع $C_1 = v_1$, $i := 1$, و $L(C_1) = 0$.

2- $i = 1 \neq p = 7$. نلاحظ أن الرأس $v_3 \notin C_1$ وأقرب الرؤوس إلى C_1.

3- ليكن $C_{i+1} = C_2 = v_1, v_3$, و $L(C_2) = 6$. اذهب إلى الخطوة 2.

....

2- $i = 2 \neq p = 7$. نلاحظ أن الرأس $v_2 \notin C_2$ وأقرب رأس إلى الرأسين المتتاليين v_1, v_3 في C_2.

3- ليكن $C_{i+1} = C_3 = v_1, v_2, v_3$, و $L(C_3) = 21$. اذهب إلى الخطوة 2.

....

2- $i = 3 \neq p = 7$. نلاحظ أن الرأس $v_7 \notin C_3$ وأقرب رأس إلى الرأسين المتتاليين v_1, v_3 في C_3.

3- ليكن $C_{i+1} = C_4 = v_1, v_7, v_3, v_2$, و $L(C_4) = 37$. اذهب إلى الخطوة 2.

....

2- $i = 4 \neq p = 7$. نلاحظ أن الرأس $v_4 \notin C_4$ وأقرب رأس إلى الرأسين المتتاليين v_7, v_3 في C_4.

3- ليكن $C_{i+1} = C_5 = v_1, v_7, v_4, v_3, v_2$, و $L(C_5) = 41$. اذهب إلى الخطوة

.2

....

2- $i = 5 \neq p = 7$. نلاحظ أن الرأس $v_6 \notin C_5$ وأقرب رأس إلى الرأسين المتتاليين v_7, v_4 في C_5.

3- ليكن $C_{i+1} = C_6 = v_1, v_7, v_6, v_4, v_3, v_2$, و $L(C_6) = 53$. اذهب إلى الخطوة 2.

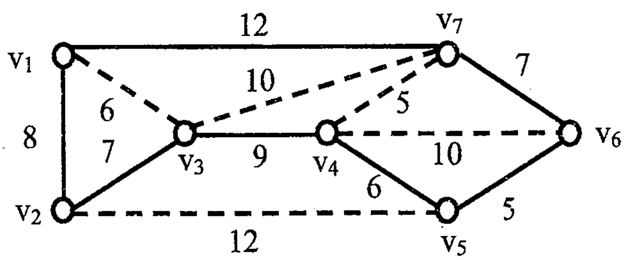
....

2- $i = 6 \neq p = 7$. نلاحظ أن الرأس $v_5 \notin C_6$ وأقرب رأس إلى الرأسين المتتاليين v_6, v_4 في C_6.

3- ليكن $C_{i+1} = C_7 = v_1, v_7, v_6, v_5, v_4, v_3, v_2$, و $L(C_7) = 54$. اذهب إلى الخطوة 2.

....

2- $i = 7 = p$. عندئذٍ توقف و $C := C_7$ هي الحلقة الهاملتونية المطلوبة, حيث $L(C) = 54$. لاحظ الشكل (6-11).□



الشكل(6-11)

تمـــــــاريـن 6:

1. ماهي البيانات الأولرية من البيانات التالية:
   a. K_p,
   b. Q_p,
   c. W_p.

2. ماهي قيم m, n التي تجعل $K_{(m, n)}$ بياناً أولرياً.

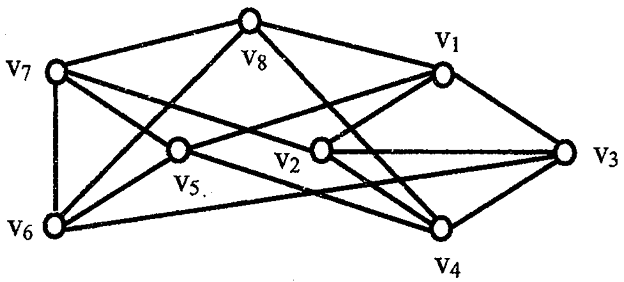
3. أثبت النتيجة (6-1).

4. ليكن G بياناً أولرياً, أثبت أن $L(G)$ أولري. هل العكس صحيح ؟.

5. أثبت النتيجة (6-2).

6. جد تعقيد الخوارزمية (6-1).

7. استخدم خوارزمية فلوري, لإيجاد دورة أولرية في البيان الموضح في الشكل التالي:



8. ابنِ بيان (2, 4)–ديبرويجن $D_{2, 4}$, بطريقة مختلفة عن الشكل (6-5) وجد رحلة أولرية مختلفة له.

9. ارسم بيان (2, 3)– ديبرويجن $D_{2, 3}$, وجد رحلتين أولريتين مختلفتين له.

10. ارسم بيان $(2, 5)$− ديبرويجن $D_{2,5}$, وجد رحلة أولرية له.

11. أثبت أن $L(D_{2,3}) = D_{2,4}$.

12. أثبت أن $L(D_{2,n}) = D_{2,n+1}$.

13. كيف يبنى $D_{3,3}$ ؟.

14. ماهي البيانات الهاملتونية من البيانات التالية:

a. $K_{(m,n)}$,
b. W_p.

15. ارسم Q_4 بطريقة ترميز الرؤوس بالترقيم الثنائي, وجد حلقته الهاملتونية.

16. هل بيان بترسن هاملتوني أم شبه هاملتوني ؟.

17. ارسم بياناً بسيطاً $G(8, q)$ بحيث $8 \le q$, يكون هاملتونياً وأولرياً.

18. ارسم بياناً بسيطاً $G(8, q)$ بحيث $8 \le q$, يكون أولرياً وغير هاملتوني.

19. ارسم بياناً بسيطاً $G(8, q)$ بحيث $8 \le q$, يكون هاملتونياً وغير أولري.

20. ليكن D بياناً موجهاً, عندئذٍ يكون D أولرياً, إذا وفقط إذا كان يمكن تجزئة $A(D)$ إلى مجموعات جزئية $A_1, A_2, \ldots, A_k$ بحيث إن البيان المحدث بالمجموعة A_i $(1 \le i \le k)$ يكون حلقة موجهة.

21. أثبت أنه إذا كان $G(V, E)$, ليس 2-مترابط, عندئذٍ G ليس هاملتونياً.

22. إذا كان كل من G, H بيان هاملتون, فهل $G \times H$ بيان هاملتون ؟.

23. إذا كان كل من G, H بيان هاملتون, فهل $G[H]$ بيان هاملتون ؟.

24. إذا كان $G(p, q)$ بياناً بحيث إن $2 \le \delta(G)$, فإن G يحتوي حلقة من الطول $\delta(G) + 1$ على الأقل.

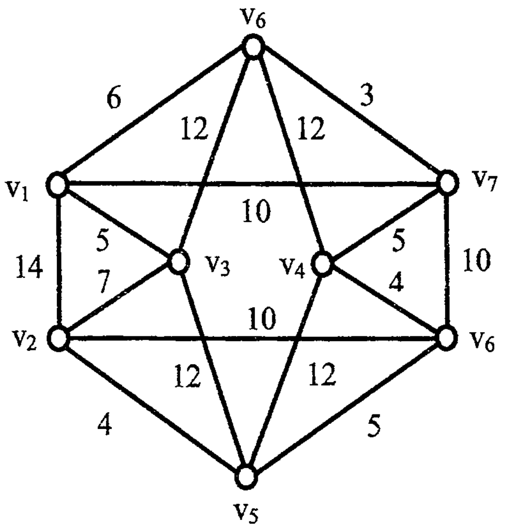
25. برهن أن كل بيان موجه دوري يحتوي على مسار هاملتون.

26. إذا كان كل من D_1, D_2 بيان هاملتون, فهل $D_1 \times D_2$ بيان هاملتون ؟.

27. لتكن لدينا رقعة شطرنج من القياس 8×8, هل يمكن للحصان ان يمر مرة واحدة على كل المربعات ويعود إلى المربع الذي بدأ منه.

28. جد تعديلاً لفكرة الخوارزمية (6-2), لإيجاد أكبر حلقة هاملتونية للبيان الموضح في الشكل (6-10).

29. استخدم الخوارزمية (6-2), لإيجاد أقصر حلقة هاملتونية للبيان الموزون الموضح في الشكل التالي:



30. طبق فكرة التمرين (28) على البيان في التمرين (29).

الفصـــل الســـابـــع

تحـــليـــل البيـــانـــات

Decomposition Of Graphs

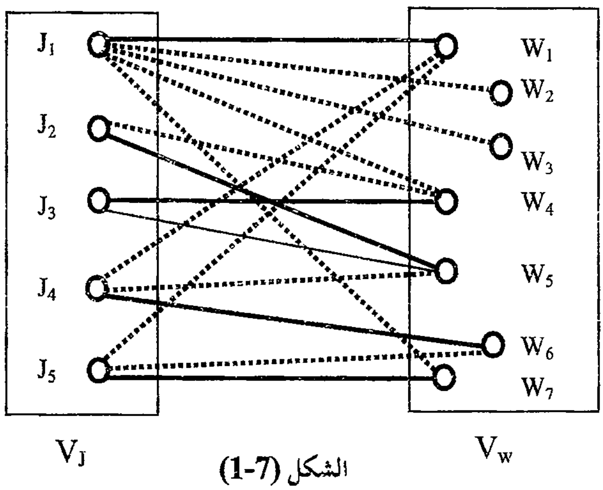
بفرض لدينا شركة ما ومجموعة من الوظائف وليكن هناك مجموعة من المرشحين للحصول على هذه الوظائف والسؤال منّ هو المرشح x المناسب للوظيفة y. بالطبع يجب شغل جميع الوظائف بمجموعة جزئية من المرشحين على افتراض أن عدد المرشحين أكبر أو يساوي عدد الوظائف الشاغرة.

لنحاول صياغة نموذج لهذه المسألة بأسلوب بياني. بالتأكيد سوف يأخذ النموذج شكل البيان ثنائي التجزئة. ليكن m عدد الوظائف والتي نعبر عنها برؤوس البيان $v_1, v_2, \ldots, v_m$ ولنفرض أنه لأجل كل وظيفة يوجد n مرشح يناسبها ولنرمز لهم $a_1, a_2, \ldots, a_n$. الآن نصل كل a_i إلى v_k إذا وفقط إذا كان المرشح a_i يناسب الوظيفة v_k. البيان الناتج ثنائي التجزئة وعدد رؤوسه مساوٍ لمجموع عدد الوظائف مع عدد المرشحين وعدد الأضلاع هو مجموع الاختيارات من المرشحين المناسبة لكل وظيفة.

حل هذه المسألة يعتمد على اختيار أفضل مرشح لكل وظيفة مع التأكيد بأن المرشح لاينال وظيفتين بالوقت نفسه ولا الوظيفة يشغلها مرشحان بالوقت نفسه. نلاحظ أن العملية بأكملها تعود إلى اختيار رأسين متوافقين, رأس من الوظائف الشاغرة والأخر من المرشحين. أي ماتم التعبير عنه بضلع يصل بينهما مع العلم في حالة

اختيار رأسين بالشروط السابقة, فإن الاختيار التالي سوف يستثني الرأسين اللذين تم اختيارهما (لأن الوظيفة السابقة قد شغلت بالمرشح السابق), وبالتالي سيتم اختيار ارتباط مستقل عن الأول بمعنى اختيار ضلع لايقع على أي من الرأسين السابقين ولايجاور الضلع السابق.

تتم كامل العملية بالأسلوب نفسه ونحصل في كل مرة على ضلع لايجاور الأضلاع السابقة. في النهاية يُنجز العمل ممثلاً بمجموعة من الأضلاع التي تربط ثنائيات من الوظائف الشاغرة والمرشحين المناسبين للوظائف والمستقلة فيما بينها حتماً, لاحظ الشكل (7-1). وهذا مانطلق عليه الأضلاع المستقلة (matching of graph) أو تجزئة البيان إلى أضلاع مستقلة (matching or independent of edges). وسنصطلح على ذلك بالتجزئة المستقلة (matching).



الشكل **(1-7)**

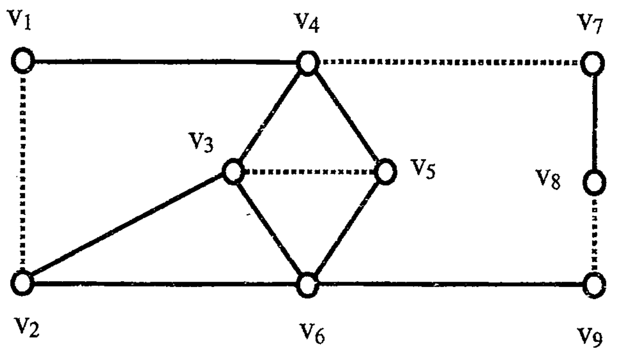
(1-7) التجزئة المستقلة في البيان (Matchings of Graph).

ليكن $G(V, G)$ بياناً ما, نقول عن مجموعة M من أضلاع البيان إنها تجزئة مستقلة في البيان G (matching or independent of edges) إذا كانت لاتحوي ضلعين متجاورين.

أكبر مجموعة مستقلة من الأضلاع (maximum matching), في البيان G, نرمز لها بـ M_{max} ونسميها تجزئة مستقلة عظمى, عدد التجزئة المستقلة للبيان هو عدد الأضلاع لتجزئة مستقلة عظمى. يمكن أن يحتوي البيان أكثر من تجزئة مستقلة عظمى ولكن لجميعها العدد نفسه. (كنا رمزنا سابقاً لأكبر مجموعة مستقلة من الأضلاع في البيان G, بالرمز $\beta_1(G)$, أي أن $M_{max}(G) = \beta_1(G)$).

نقول عن ضلع إنه ضعيف الاتصال (weak with respect) بالتجزئة المستقلة M, إذا لم يكن في M. ونقول عن رأس إنه ضعيف الاتصال بالتجزئة المستقلة M, إذا كان يقع فقط على أضلاع ضعيفة الاتصال. ويكون M–مساراً متناوباً (M-alternating path) في البيان G, إذا كانت أضلاعه متناوبة من أضلاع من التجزئة المستقلة M ومن أضلاع ليست في M (أو بالعكس, أضلاعه متناوبة بأضلاع ليست من M وأضلاع من M). ونقول عن M–مسار ازدياد (M-augmenting path) في البيان G, إذا كان مساراً متناوباً رأسيه الطرفيين ضعيفي الاتصال بالتجزئة المستقلة M. نستنتج أن M–مسار ازدياد, يبدأ وينتهي بضلع ضعيف الاتصال.

مثال (7-1): ليكن البيان الموضح في الشكل (7-2).



الشكل(2-7)

نلاحظ أن الأضلاع v_2v_3, v_4v_5, v_7v_8 : M تشكل تجزئة مستقلة.
M–مسار ازدياد يحتوي التجزئة المستقلة M, يكون المسار

$$v_1, v_2, v_3, v_5, v_4, v_7, v_8, v_9$$

وهو مسار متناوب الأضلاع مكون من أضلاع متقطعة ليست في M وأضلاع M. ونجد أن الرأسين الطرفيين في مسار الازدياد هما الرأسان v_1, v_9 يقعان على أضلاع ضعيفة الاتصال بـ M (أي تقع على أضلاع ليست في M).

مبرهنة (7-1): لتكن M_1, M_2 مجموعتي تجزئة مستقلة في البيان G. عندئذٍ كل مركبة من البيان الموسع H مع مجموعة الأضلاع

$$E(H) = (M_1 - M_2) \cup (M_2 - M_1)$$

تكون من إحدى الحالات التالية:

1. رؤوس معزولة.

2. حلقة ذات طول زوجي متناوبة الأضلاع من M_1 و M_2.

3. مسار أضلاعه متناوبة من M_1 و M_2, حيث إن كل رأس طرفي للمسار يكون ضعيف الاتصال مع واحد فقط من M_1 و M_2.

البرهان: بسهولة نجد أن $\Delta(H) \leq 2$, لأن كل رأس لايمكن أن يقع على أكثر من ضلع في كل تجزئة مستقلة. هذا يؤدي إلى أن المركبات تشكل مساراً وحلقة أو رؤوساً معزولة.

الآن, لندرس مركبة في H ليست رؤوساً معزولة. من السهل ملاحظة أنه في كل مركبة يجب تناوب الأضلاع من M_1 و M_2, وإلا هناك تناقض مع تعريف التجزئة المستقلة. عندئذٍ, إذا كانت المركبة حلقة فإنها تكون زوجية ومتناوبة الأضلاع.

من أجل الحالة الثالثة, لنفرض أن المركبة مسار ولنثبت أن أي رأس طرفي في المسار يكون ضعيف الاتصال مع واحدة فقط من M_1 و M_2. واضح أن كل رأس طرفي يقع على ضلع من إحدى التجزئتين. لنفرض الرأس u يقع على الضلع e. إذا كان $deg(u) = 1$ في G, عندئذٍ يكون الرأس u ضعيف الاتصال بالنسبة للتجزئة التي تضم الضلع السابق للضلع e. إذا كان $deg(u) \geq 2$, عندئذٍ بدون التقليل من عمومية المسألة, لنعتبر أن $e \in M_1 - M_2$, أي $e \in M_1$ و $e \notin M_2$. الآن, يمكننا أن نمدد المسار المفروض, وهذا يتعارض مع حقيقة أن الرأس هو طرفي لمسار وهذا المسار مركبة من H، بمعنى أخر لايمكن أن يكون الضلع التالي للضلع e ينتمي إلى M_2. ينتج مما سبق, أن أية مركبة من البيان الموسع H لايمكن أن تخرج عن الأشكال الثلاثة المفروضة.□

من الشكل (7-2), كتطبيق على المبرهنة (7-1). ليكن

$$M_1 : v_2v_3,\ v_4v_5,\ v_7v_8,\ v_9v_6,$$
$$M_2 : v_1v_4,\ v_3v_5,\ v_2v_6,\ v_7v_8,$$

عندئذٍ

$$E(H) = (M_1 - M_2)\cup(M_2 - M_1) = \{v_1v_4,\ v_4v_5,\ v_5v_3,\ v_3v_2,\ v_2v_6,\ v_6v_9,\}.$$

نلاحظ أن طرفي المسار v_1, v_9, حيث v_1 ضعيف الاتصال بالتجزئة M_1 و v_9 ضعيف الاتصال بالتجزئة M_2.

مبرهنة (7-2) بيرج (Berge's): التجزئة المستقلة M في البيان G تكون أعظمية, إذا وفقط إذا كان لايوجد هناك M-مسار ازدياد في G.

البرهان: $\Leftarrow$: لتكن M تجزئة مستقلة عظمى في G. ولنفرض أن G يحتوي M-مسار ازدياد

$$P: v_0, v_1, \ldots, v_k$$

بالطبع أن k عدد فردي. لتكن M_1 معرفة بالشكل

$$M_1 = (M - \{v_1v_2,\ v_3v_4,\ \ldots,\ v_{k-2}v_{k-1}\}) \cup\{v_0v_1,\ v_2v_3,\ \ldots,\ v_{k-1}v_k\},$$

عندئذٍ تكون M_1 تجزئة مستقلة في G, وتحتوي ضلع زيادة عن M. ينتج مما سبق, أن M ليست تجزئة مستقلة عظمى وهذا تناقض.

$\Rightarrow$: لنفرض أن M ليست تجزئة مستقلة عظمى ولتكن M_1 تجزئة مستقلة عظمى في G. سوف نناقش البيان الموسع H, المبين بالشكل التالي:

$$E(H) = (M - M_1) \cup (M_1 - M)$$

من المبرهنة (7-1), نعلم حالة المركبات في H. ومما سبق, نجد أن هناك مساراً متناوباً في H يجب أن يحتوي أضلاعاً من M_1 زيادة مما يحتويه من M وذلك لأن M_1 تضم أضلاعاً أكثر من M. لكن هذا المسار يجب أن يكون M–مسار ازدياد في G, وهذا يناقض الفرض بأنه لايوجد مسار ازدياد في G. وبالتالي نستنتج أن M تجزئة مستقلة عظمى.□

(7-2) التجزئة في بيان ثنائي التجزئة (Matchings of Bipartite Graph).

سوف نتناول في هذا الجزء نظرية هول وبعض تطبيقاتها. هناك قصة شعبية لنظرية هول (Hall's Theorem) مأخوذة من أوضاع وحالات الزواج. أي ارتباط شاب وفتاة بعلاقة الزواج والذي يُعبر عنه بضلع يربط طرفين مُمثلين برأسين. في هذه المسالة, ماهو أكبر عدد ممكن من الزيجات التي يمكننا عقدها بين مجموعة أولى من الشباب ومجموعة ثانية من الفتيات بشكل ثنائي فقط (شاب – فتاة). ناقش هول المسألة بطريقة التجزئة المستقلة في البيان الثنائي التجزئة على اعتبار كل رباط ثنائي (شاب – فتاة) مستقل عن غيره وطرح الفكرة بالشكل التالي:

نظرية الزواج (The Marriage Theorem): في جمعية مكونة من m شاب و w فتاة, هناك ارتباط بعلاقة زواج بين الفتيات وما يقابلهن من الشباب (فتاة – شاب), إذا وفقط إذا كان, كل مجموعة جزئية مؤلفة من k فتاة $(1 \le k \le w)$ راغبات بالزواج على الأقل بـِ k شاب. (حيث يمكن أن ترى الفتاة

أن هناك أكثر من شاب يناسبها أو ترغب به وبالتالي هناك أكثر من احتمال لعلاقة زواج هذه الفتاة, لكن في النهاية تتزوج شاباً واحداً).

قدم هول نظرية الزواج بصيغة رياضية بيانية ممثلةً ببيان ثنائي التجزئة على الشكل التالي:

قبل صياغة مبرهنة هول نذكر التعريف التالي: ليكن G بياناً ما و M تجزئة مستقلة, عندئذٍ نقول عن مجموعة الرؤوس S إنها مقترنة بـِ M (matched), إذا كان كل رأس من S يقع على ضلع من M. ونقول عنها مقترنة بمجموعة الرؤوس B من خلال M, إذا كان كل رأس من S يقع على ضلع من M رأسه الأخر من B, بمعنى أخر أن أضلاع M تربط رؤوس S مع رؤوس B.

مبرهنة الزواج (3-7) هول (Hall's): ليكن $G = (X \cup Y, E)$ بياناً ثنائي التجزئة. عندئذٍ تكون X مقترنة بمجموعة جزئية من Y, إذا وفقط إذا كان $|N(S)| \geq |S|$ لأجل كل مجموعة جزئية S من X.

البرهان: $\Leftarrow$: لنفرض أنه يمكن أقتران X بمجموعة جزئية من Y. بما أن كل رأس من X يكون مقترناً برأس مختلف من Y, عندئذٍ بسهولة نجد $|N(S)| \geq |S|$.

$\Rightarrow$ العكس: لنفرض أن $G = (X \cup Y, E)$ بيان ثنائي التجزئة و X لايمكن اقترانها بمجموعة جزئية من Y. سوف نعمل للحصول على تناقض مع شرط التجاور, أي مع $|N(S)| \geq |S|$. لنناقش أكبر تجزئة عظمى M_{max} في G. من الفرض, لدينا أضلاع M_{max} لاتقع على جميع الرؤوس في X (لأن X ليست

مقترنة بـ Y). ليكن $u \in X$ رأساً ضعيف الاتصال إلى M_{max} ولتكن A مجموعة كل الرؤوس في G والتي ترتبط بالرأس u بـ M_{max}-مسار متناوب. بما أن M_{max} تجزئة عظمى, عندئذٍ من المبرهنة (2-8) يكون u الرأس الوحيد الضعيف الاتصال إلى A. لنأخذ $S = A \cap X$ و $T = A \cap Y$. واضح أن رؤوس $S - \{u\}$ مقترنة برؤوس من T, علاوةً على ذلك $|T| = |S| - 1$ و $T \subseteq N(S)$. في الحقيقة, $T = N(S)$, لأن كل رأس في N(S) يرتبط بـ u بمسار متناوب. وبالتالي نجد $|N(S)| = |S| - 1 < |S|$ وهذا تناقض مع شرط التجاور.□

التجزئة المستقلة المثالية (perfect matching) في البيان G, M_p, هي تجزئة مستقلة بحيث كل رأس في البيان يقع على ضلع واحد فيها. البيان في الشكل (1-7) لايحتوي تجزئة مستقلة مثالية, لماذا ؟.

نتيجة (1-7): إذا كان G بياناً وk-منتظماً ثنائي التجزئة, حيث $0 < k$, عندئذٍ G له -تجزئة مستقلة مثالية.

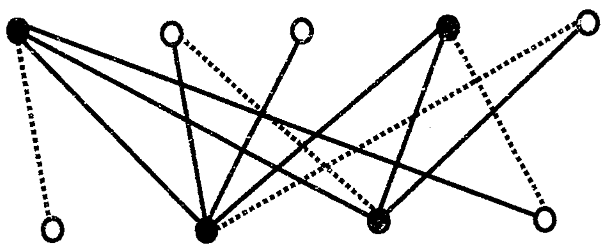
البرهان: ليكن $G = (X \cup Y, E)$ بياناً وk-منتظماً ثنائي التجزئة. عندئذٍ $|E| = k\,|Y| = k\,|X|$, وبما أن $0 < k$, ينتج $|X| = |Y|$. لأجل أي مجموعة جزئية A من رؤوس G, لتكن E_A مجموعة من الأضلاع من G والواقعة على رأس من A. ولتكن $S \subseteq X$, ولندرس E_S و $E_{N(S)}$. من تعريف N(S) (مجموعة المجاورات المفتوحة) نلاحظ أن $E_S \subseteq E_{N(S)}$. هذا يؤدي إلى أن

$$K\,|N(S)| = |E_{N(S)}| \geq |E_S| = k\,|S|$$

ومنه $|N(S)| \geq |S|$. من المبرهنة (7-3), يمكن اقتران X بمجموعة جزئية من Y. بما أن $|X| = |Y|$, عندئذٍ G, يحتوي حتماً تجزئة مستقلة مثالية.□

نقول عن مجموعة الرؤوس B من مجموعة رؤوس البيان G, إنها تغطي أضلاعه (cover the edges), إذا كل ضلع في G يقع على رأس من B. يسمى عدد أصغر مجموعة تغطية في البيان, بعدد التغطية ويرمز له $\alpha(G)$.

مثال (7-2): ليكن البيان الموضح في الشكل (7-3).



الشكل(7-3)

نلاحظ أن:

الأضلاع المتقطعة تشكل تجزئة مستقلة وبالتالي $M_{max}(G) = 4$, لماذا ؟.

الرؤوس السوداء هي مجموعة تغطية, أي أن $\alpha(G) = 4$.

مبرهنة (7-4) كونيك (König): ليكن $G = (X \cup Y, E)$ بياناً ثنائي التجزئة. عندئذٍ

$$M_{max}(G) = \alpha(G).$$

البرهان: لتكن أكبر تجزئة مستقلة في G تحوي $M_{max} = m$ ضلعاً ولتكن أقل تغطية لأضلاع G تحوي $\alpha(G) = c$ رأساً. واضح أن $m \le c$.

لتكن M_{max} تجزئة مستقلة عظمى في G. ولتكن W مجموعة الرؤوس من X ضعيفة الاتصال مع M_{max}. نلاحظ أن $|M_{max}| = |X| - |W|$. لتكن S مجموعة الرؤوس من G والتي ترتبط ببعض رؤوس من W بمسار متناوب. نعرف $S_X = S \cap X$ و $S_Y = S \cap Y$.

من تعريف S وحقيقة أن $S_X - W$ لاتحوي رأساً ضعيف الاتصال, نجد أن $S_X - W$ مقترنة مع S_Y من خلال M_{max} وأن $N(S_X) = S_Y$. بما أن $S_X - W$ مقترنة مع S_Y, نجد أن $|W| = |S_X| - |S_Y|$.

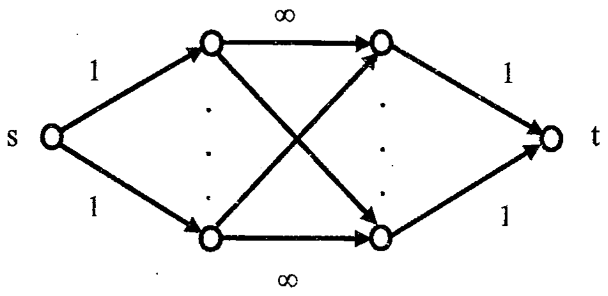
لنضع $C = (X - S_X) \cup S_Y$. عندئذٍ C تغطي $E(G)$, وإلا يوجد ضلع uv في G بحيث إن $u \in S_X$ و $v \notin S_Y = N(S_X)$ وهذا غير ممكن. ومنه نجد

$$|C| = |X| - |S_X| + |S_Y| = |X| - |W| = |M|.$$

ينتج من ذلك أن $c = m$.□

ليكن $G = (X \cup Y, E)$ بياناً ثنائي التجزئة. سوف نبني شبكة N_G الموافقة للبيان G بالشكل التالي:

أولاً نوجه جميع الأضلاع من X إلى Y. ونضيف مصدر s إلى كل رؤوس X ومصب t إلى كل رؤوس Y. نعطي السعة $cap = 1$ إلى كل الأقواس الخارجة من s أو الداخلة إلى t. الأقواس الخارجة من X إلى Y نعطيها السعة $cap = \infty$. لاحظ الشكل (7-4). الآن يمكن صياغة المبرهنة التالية:



الشكل(7-4)

ملاحظة (7-1): التدفق في الشبكات سوف يُدرس بالتفصيل في الفصل العاشر.

مبرهنة (7-5): ليكن $G = (X \cup Y, E)$ بياناً ثنائي التجزئة. عندئذٍ عدد أضلاع التجزئة العظمى في G يساوي التدفق الأعظمي في الشبكة الموافقة للبيان G, أي أن $M_{max}(G) = F(N_G)$.

البرهان: لتكن M_{max} تجزئة عظمى في البيان G. لأجل كل ضلع xy في M_{max}, سوف نستخدم المسار الموجه s, x, y, t للتدفق $F = 1$ من s إلى t. وهذا التدفق ينطبق على كل المسارات من s إلى t والمنفصلة عن بعضها بعضاً. ينتج أن $M_{max} \leq F$.

الآن لتكن f دالة تدفق صحيحة على الشبكة N_G الموافقة للبيان G. جميع المسارات الموجهة بين s و t لها الشكل s, x, y, t. إذا استخدمنا المسار s, x, y, t لجريان التدفق, عندئذٍ لايمكن استخدام المسار s, x_i, y, t (أي استخدام الرأس y مع رأسين مختلفين من X), ولذات السبب لايمكن استخدام المسار s, x, y_j, t. عندئذٍ, لأجل

مجموعة الأضلاع xy, الدالة $f(x \to y) = 1$ تحدد تجزئة في G. هذا يؤدي إلى أن $\beta_1 = M_{max} \geq F$. وبالتالي نستنتج أن $M_{max} = F$.□

سوف نلخص دراستنا لمسألة الزواج بمناقشة الاستقرار (stability). لنفرض لدينا مجموعة مكونة من n شاب $m_1, m_2, \ldots, m_n$ و n فتات $w_1, w_2, \ldots, w_n$.
ليكن الشاب m_1 متزوجاً من الفتاة w_1 و m_2 متزوجاً من w_2. لنفرض في الواقع أن m_2 يُفضل w_1 على زوجته و w_1 تُفضل m_2 على زوجها. نلاحظ باعتقادنا أنه لايوجد استقرار (stable).
لنبنِ جدولين للأفضلية. في كل جدول, الأسطر ترمز للشباب والأعمدة ترمز للفتيات. العناصر الداخلة في أي سطر لجدول التفضيل الأول يكون من 1 إلى n. هذا يشير إلى ترتيب أفضلية الفتيات بالنسبة للشاب الموافق للسطر (العدد 1 يشير إلى أول اختيار). وبالأسلوب نفسه يمكن توضيح الأعمدة والتي تشير إلى الاختيارات المفضلة للفتيات من الشباب).
عندئذٍ مسألتنا, تؤول إلى جدولين من الاختيارات المفضلة ويمكن إيجاد مجموعة استقرار لهذه الزيجات. هذا يكون بإيجاد تجزئة مستقلة لاتحوي ضلعين مستقلين غير مستقرين.

لنقدم الآن وصفاً للخوارزمية التي تعطينا الاستقرار المنشود وذلك بإيجاد التجزئة المستقلة المستقرة (stable matching).

خوارزمية (7-1) التجزئة المستقلة واستقرار الزواج
(Stable Matching Algorithms and Stable Marriage):

المعطيات: جداول تفضيل للشباب والفتيات.

المخرجات : مجموعة الزيجات المستقرة.

خطوات الخوارزمية :

1- كل شاب يقدم عرضاً لأفضل اختيار له.

2- الفتيات المقدم لهنّ عرضان أو أكثر, يجب رفض الكل باستثناء الأكثر أفضلية بالنسبة لها. وإلا, لايوجد فتاة تقبل أي عرض.

3- الشباب الذين تم رفض عروضهم يتقدمون إلى الاختيار التالي المفضل لهم. الذين لم يصلهم رد الرفض يستمروا في عرضهم للفتاة نفسها.

4- كرر الخطوة 3, حتى تصل لمرحلة عدم رفض أي عرض.

واضح أنه يمكن لكل فتاة, رفض عدد منتهٍ من العروض وهو على الأكثر n -1 عرض. وبالتالي سوف يتوقف عمل الخوارزمية بعد عدد منتهٍ من الخطوات.

مثال (7-3): ليكن الجدولان (7-1) و (7-2) التاليان والموضحان للرغبات المفضلة للشباب والفتيات.

w_4	w_3	w_2	w_1	شباب
4	3	2	1	m_1
2	3	4	1	m_2
4	3	1	2	m_3
1	3	2	4	m_4

جدول (7-1), جدول الخيارات الأفضل للشباب

w_4	w_3	w_2	w_1	فتيات
3	2	3	3	m_1
2	3	1	4	m_2
1	4	4	2	m_3
4	1	2	1	m_4

جدول (7-2), جدول الخيارات الأفضل للفتيات

لتوضيح الجداول نجد أن:

في الجدول (7-1), الشاب m_2 يفضل على الترتيب w_1, w_4, w_3, وأخر خياراته w_2.

في الجدول (7-2), الفتاة w_2 تفضل على الترتيب m_2, m_4, m_1, وأخر خياراتها m_3.

مناقشة العروض P_i تظهر في الخطوات التالية:

في كل عرض يتقدم جميع الشباب بعروض الزواج, كل منهم إلى الفتاة التي يراها الأفضل له حتى يُرفض أو يُقبل, لذلك تكون العروض المرفوضة في البداية لأنه

إذا قُبل العرض فليس هناك ضرورة لعرض آخر. وفي حالة الرفض نبدأ بعرض الاختيار المفضل التالي.

لتوضيح خطوات العروض P_i, وقرار الزيجات, سوف نرمز للرفض بـ (ر) وعدم الرفض بـ (ع.ر), للقبول بـ (ق) وعدم القبول بـ (ع.ق). في حالة عدم القرار, يُعاد نفس العرض أي عندما يكون الجواب (ع.ر + ع.ق), ويعني عدم رفض وعدم قبول, لربما تنتظر الفتاة خيارات أخرى بأفضل ظروف.

وعليه يمكن أن نوضح عملية العروض وخيارات الزواج للشباب m_1, m_2, m_3, m_4 بخطواته ومراحله التالية:

<u>في العرض الأول P_1</u>:

m_1 : خياره الأول المفضل الفتاة w_1 ← ع.ر + ع.ق.

m_2 : خياره الأول المفضل الفتاة w_1 ← ر.

m_3 : خياره الأول المفضل الفتاة w_2 ← ع.ر + ع.ق.

m_4 : خياره الأول المفضل الفتاة w_4 ← ع.ر + ع.ق.

<u>في العرض الثاني P_2</u>:

m_1 : يستمر الخيار المفضل للفتاة w_1 ← ع.ر + ع.ق.

m_2 : الخيار المفضل الثاني الفتاة w_4 ← ع.ر + ع.ق.

m_3 : يستمر الخيار المفضل للفتاة w_2 ← ع.ر + ع.ق.

m_4 : يستمر الخيار المفضل للفتاة w_4 ← ر.

<u>في العرض الثالث</u> P_3:

m_1 : يستمر الخيار المفضل للفتاة w_1 ← ع.ر + ع.ق.

m_2 : يستمر الخيار المفضل الثاني للفتاة w_4 ← ع.ر + ع.ق.

m_3 : يستمر الخيار المفضل للفتاة w_2 ← ر.

m_4 : الخيار المفضل الثاني للفتاة w_2 ← ع.ر + ع.ق.

<u>في العرض الرابع</u> P_4:

m_1 : يستمر الخيار المفضل للفتاة w_1 ← ر.

m_2 : يستمر الخيار المفضل الثاني للفتاة w_4 ← ع.ر + ع.ق.

m_3 : الخيار المفضل الثاني للفتاة w_1 ← ع.ر + ع.ق.

m_4 : يستمر الخيار المفضل الثاني للفتاة w_2 ← ع.ر + ع.ق.

<u>في العرض الخامس</u> P_5:

m_1 : الخيار المفضل الثاني للفتاة w_2 ← ر.

m_2 : يستمر الخيار المفضل الثاني للفتاة w_4 ← ع.ر + ع.ق.

m_3 : يستمر الخيار المفضل الثاني للفتاة w_1 ← ع.ر + ع.ق.

m_4 : يستمر الخيار المفضل الثاني للفتاة w_2 ← ع.ر + ع.ق.

<u>في العرض السادس</u> P_6:

m_1 : الخيار المفضل الثالث للفتاة w_3 ← ع.ر + ع.ق.

m_2 : يستمر الخيار المفضل الثاني للفتاة w_4 ← ع.ر + ع.ق.

m_3 : يستمر الخيار المفضل الثاني للفتاة w_1 ← ع.ر + ع.ق.

m_4 : يستمر الخيار المفضل الثاني للفتاة w_2 ← ع.ر + ع.ق.

في العرض السادس, نلاحظ أنه لاعرض يرفض وبالتالي هو حالة استقرار الزواج.

كما نجد أن كل فتاة لاتقرر بشأن أي شاب حتى يتقدم شاب آخر تفضله عليه. لنرى أن الفتاة w_1 تستمر بعدم القرار بشأن الشاب m_1 حتى يتم رفض الشاب m_3 من الفتاة w_2. عندئذٍ تصبح الفتاة w_1 الخيار المفضل له وهي تفضله على الجميع بحسب جدول الخيارات المفضلة للفتيات, الجدول (7-2), عندها يتم التوافق والزواج, مبارك. وهكذا يكون تحليل باقي الحالات. وتتم العروض والزيجات كما يوضحه الجدول التالي:

P_6	P_5	P_4	P_3	P_2	P_1	العروض
3	2*	1*	1	1	1	m_1
4	4	4	4	4	1*	m_2
1	1	1	2*	2	2	m_3
2	2	2	2	4*	4	m_4

جدول (7-3), جدول العروض والرفض والقبول

الأعداد المؤشر عليها بـ * هي حالات رفض العرض.

ومنه تتم الزيجات المستقرة في العرض السادس لأنه لايحتوي أي رفض, كما يلي:

الشاب m_1 يتزوج الفتاة w_3,

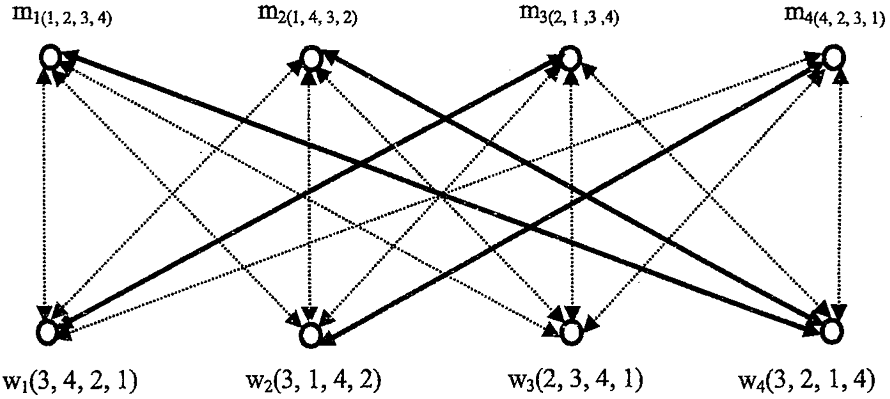
الشاب m_2 يتزوج الفتاة w_4,

الشاب m_3 يتزوج الفتاة w_1,

الشاب m_4 يتزوج الفتاة w_2.

البيان في الشكل (5-7), يوضح كيفية تحويل المسألة لبيان ثنائي التجزئة وهو تام. وتم إرفاق كل رأس بمتتالية ترتيب أفضلية الخيارات, مثلاً $m_{2(1, 4, 3, 2)}$ يفضل بالترتيب الأولى, الرابعة, الثالثة ثم الثانية. ويوضح الشكل الزيجات المستقرة (stable marriage), التي تتم في النهاية وهي عبارة عن أقواس باتجاهين (الأقواس الغامقة). كما أنها تشكل تجزئة مستقلة مثالية (perfect matching). يمكن تمثيل المسألة بطريقة أوضح, وتتم بتحويلها إلى بيان موجه ثنائي التجزئة وهو تام بحيث يرفق القوس المتجهة من كل رأس (يمثل شاب أو فتاة) إلى رأس أخر (يمثل فتاة أو شاب), بوزن الأولوية لرغبة الزواج من الطرف الأخر. لكن تم التوضيح بالشكل (3-7) لسهولة كتابة الأوزان كمتتاليات بجانب الرؤوس وصعوبة كتابتها على الأقواس بسبب كثافتها.

بالطبع يمكن دراسة المسألة عندما يكون أحد الفريقين أقل عدداً من الفريق الأخر على أن تتم الزيجات بعدد الفريق الأقل. وفي كل الحالات تُناقش المسألة ضمن شرط عدم السماح بتعدد الزوجات أي (شاب ↔ فتاة) فقط وليس (شاب ↔ فتاة + فتاة + فتاة + فتاة).



الشكل(7-5)

(3-7) تحليل البيان إلى عوامل (Factorization of Graph).

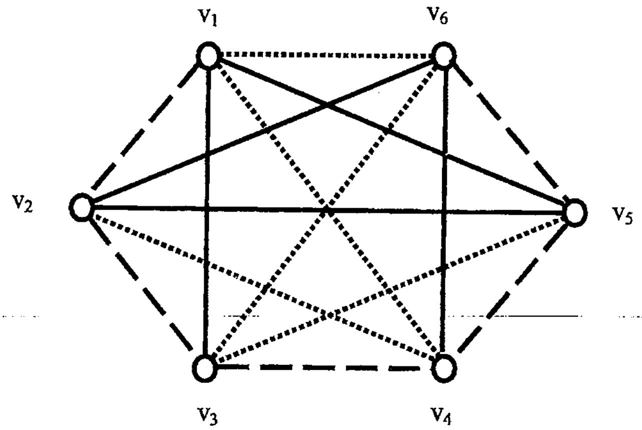
سوف ندرس الآن التجزئة بشكل عام. في أحوال كثيرة يطلق على التجزئة المثالية على أنها 1-عامل (1-factor)، لأن التجزئة المستقلة المثالية تكون بياناً 1-منتظماً جزئياً موسعاً للبيان. ويمكن توسيع الفكرة إلى k-عامل (k-factor) على أنها بيان k-منتظم جزئي موسع لبيان محدد.

يمكن أن نعرف تحليل البيان G إلى عوامل (factorization)، بأنه تجزئة مجموعة أضلاع البيان G إلى بيانات جزئية موسعة تتضمن جميع رؤوس البيان وبالطبع مجموعة جزئية من أضلاعه وتحقق خاصية معينة.

كذلك نعرف تحليل البيان إلى k-عامل (k-factor)، بأنه تجزئة مجموعة أضلاع البيان G، إلى بيانات جزئية موسعة ومنتظمة من الدرجة k. يمكن أن نرى بسهولة أن تحليل البيان إلى 1-عامل (1-factor) هو التجزئة المستقلة المثالية للبيان G.

نقول عن رأسين إنهما متصلان بالنسبة للتحليل 1-عامل, إذا كانا يقعان على ضلع واحد في هذا التحليل. بالطبع يمكن أن يوجد أكثر من تحليل للبيان G وبالشروط نفسها, مثلاً هناك أكثر من تحليل 2-عامل للبيان التام K_7.

مثال (4-7): البيان K_6 يمكن تحليله إلى ثلاث مسارات موسعة P_6 كما في الشكل (6-7).



الشكل(6-7)

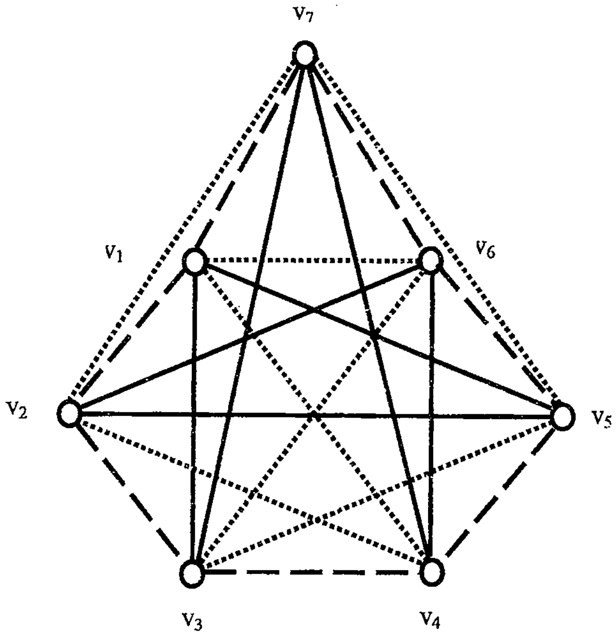
المسارات هي كما تظهر في الشكل (6-7),

مسار بأضلاع منقطعة $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$,

مسار بأضلاع منقطة $v_2, v_4, v_1, v_6, v_3, v_5$,

مسار بأضلاع غامقة مستمرة $v_3, v_1, v_5, v_2, v_6, v_4$.

مثال (5-7): البيان K_7 يمكن تحليله إلى 2-عامل (أي إلى حلقات C_7), كما في الشكل (7-7).



الشكل(7-7)

تحليل K_7 إلى 2-عامل (C_7) يظهر كما في الشكل (7-7)، بالصورة التالية:

C_7 بأضلاع متقطعة $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$،

C_7 بأضلاع منقطة $v_2, v_4, v_1, v_6, v_3, v_5, v_7$،

C_7 بأضلاع غامقة مستمرة $v_3, v_1, v_5, v_2, v_6, v_4, v_7$.

مبرهنة (7-6): ليكن $G(p, q)$ بياناً حيث $p = 2n$ و $n \leq \delta(G)$، عندئذٍ G يحتوي تحليل 1-عامل.

البرهان: البرهان يأتي مباشرةً من المبرهنة (6-6).□

ليكن $k_o(G)$ عدد المركبات في G والتي لها عدد فردي من الرؤوس. نقول عن بيان G إنه بيان هاملتون إذا كان يحتوي حلقة تضم جميع رؤوسه ونسمي هذه الحلقة بحلقة هاملتونية.

نقبل المبرهنة التالية بدون برهان.

مبرهنة (7-7) (Tutte's 1-factor Theoem): كل بيان غير تافه له تحليل 1-عامل, إذا وفقط إذا كان $k_o(G - S) \leq |S|$ وذلك لأجل أي مجموعة جزئية $S \subset V(G)$.

مبرهنة (8-7) (Petersen's 1-factor Theoem): كل بيان مترابط 3-منتظم لايحتوي جسوراً له تحليل 1-عامل و 2-عامل.

البرهان: يكفي البرهان أن G له تحليل 1-عامل لأن الأضلاع الباقية تشكل تحليل 2-عامل. بفرض أن G لايحتوي تحليل 1-عامل, عندئذٍ من المبرهنة (7-7) يوجد في G مجموعة جزئية خاصة S من الرؤوس مكونة من k رأس بحيث إن $k = |S| < k_o(G - S)$. بفرض $G_1, G_2, \ldots, G_n$ مركبات لها عدد رؤوس فردي في $G - S$. يوجد ضلع من كل مركبة G_i إلى S $(1 \leq i \leq n)$ أو بعض G_i يكون 3-منتظم من الرتبة الفردية وهذا غير ممكن. بما أن G لايحتوي على جسور, عندئذٍ لايمكن أن يكون ضلعاً واحداً يربط S إلى أي من G_i. إذا كان هناك

ضلعان فقط يربطان S إلى بعض G_i, عندئذٍ G_i من الرتبة الفردية يحتوي عدداً فردياً من درجات الرؤوس وهذا غير ممكن. ينتج مما سبق, على الأقل هناك ثلاثة أضلاع بين S وأي مركبة G_i. وبالتالي هناك على الأقل 3n ضلع بين S و G_i $(1 \leq i \leq n)$. بما أن كل رأس من S له درجة 3, يجب أن يكون هناك 3k ضلع إلى S. لكن $3k < 3n$, وهذا تناقض. ينتج أنه لايمكن إيجاد S المعرفة بالفرض وبالتالي حسب المبرهنة (7-7), G يحتوي تحليل 1-عامل.□

ليكن البيان $G(V, E)$, نقول عن الضلعين v_iv_j, v_kv_h إنهما متوازيان, إذا كان الرأس v_k يبعد عن أحدى رأسي v_iv_j بمسافة مساوية لبعد الرأس v_h عن الرأس الأخر.

نقبل المبرهنة التالية بدون برهان.

مبرهنة (7-9): (Chartrand and Lesniak, 1986) البيان غير الخالي G, قابل للتحليل إلى 2-عامل, إذا وفقط إذا كان G, 2r-منتظماً لأجل بعض قيم r الصحيحة الموجبة.

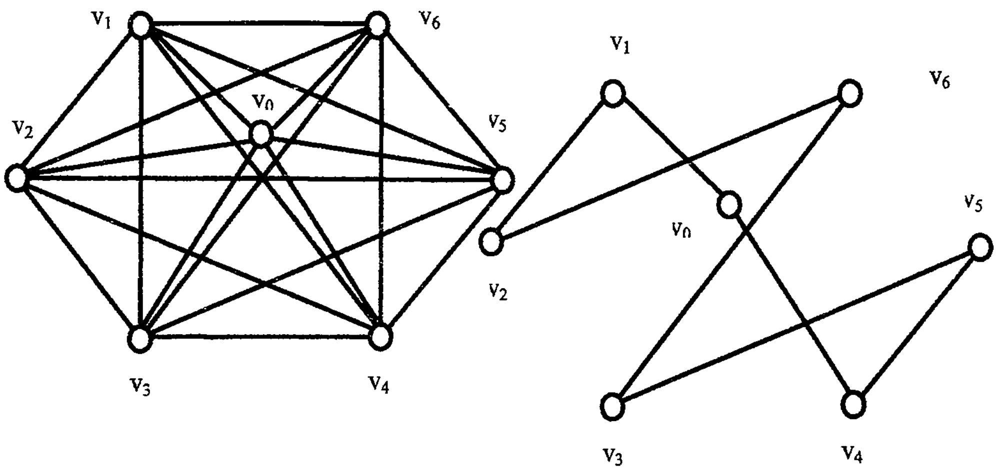
مبرهنة (7-10): لأجل كل عدد صحيح موجب p, البيان K_{2p+1}, قابل للتحليل إلى p حلقة هاملتونية.

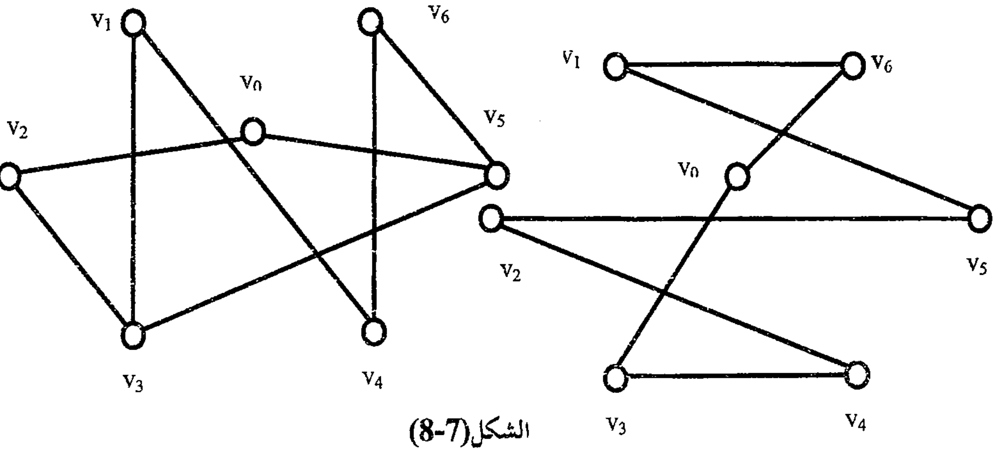
البرهان: واضح صحة المبرهنة عندما $p = 1$. لنفرض أن $2 \leq p$, لتكن رؤوس K_{2p+1}, $v_0, v_1, \ldots, v_{2p}$. نرتب الرؤوس $v_1, \ldots, v_{2p}$ على شكل حلقة ونصل

بين الرؤوس فينتج بيان منتظم من الدرجة $2p - 1$, ثم نضع الرأس v_0 في مركز الشكل المرتب ونصله ببقية الرؤوس المرتبة. واضح أن البيان الناتج هو K_{2p+1}.
نعرف F_i $(1 \le i \le p)$ للتحليل 2-عامل على أنها تحتوي الأضلاع v_0v_i, v_0v_{p+i} ثم v_iv_{i+1} وكل الأضلاع الموازية له والضلع $v_{i-1}v_{i+1}$ وكل الأضلاع الموازية له (جميع الأدلة مأخوذة هنا بالقياس $2p$). عندئذٍ F_i يكون حلقة هاملتونية, وأضلاع البيان K_{2p+1} تكون مجموعاً لـ p حلقة هاملتونية من الرتبة $2p + 1$ (أي 2-عامل).□

المثال التالي تطبيق على المبرهنة (7-10).

مثال (7-6): ليكن البيان K_7, عندئذٍ يمكن تحليله إلى 2-عامل بحسب المبرهنة (7-10) كما في الشكل (7-8).





الشكل(7-8)

نتيجة (7-2): لأجل كل عدد صحيح موجب p, البيان K_{2p}, قابل للتحليل إلى p مسار هاملتوني.

البرهان: يترك كتمرين للطالب.□

مبرهنة (7-11): (Chartrand and Lesniak, 1988) لأجل كل عدد صحيح موجب p, البيان K_{2p}, قابل للتحليل إلى 1-عامل.

البرهان: يترك كتمرين للطالب.□

مبرهنة (7-12): البيان $K_{(m, n)}$ قابل للتحليل إلى P_4, إذا وفقط إذا كان $2 \le m, n$ و $mn \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$.

البرهان: من الواضح لزوم الشرطين $2 \le m, n$ و $mn \equiv 0(\mod 3)$, لأن P_4 يحتوي ثلاثة أضلاع ونعلم أن $K_{(m, n)}$ عبارة عن حلقات.

لنثبت كفاية الشرط : بدون التقليل من عمومية المسألة ليكن $m = 3r$ و $n = 2s + 3t$ حيث $0 \le s, t$, عندئذٍ يمكن تحليل $K_{(m, n)}$ إلى $r\ s$ نسخة من $K_{(2, 3)}$ و $r\ t$ نسخة من $K_{(3, 3)}$. وبسهولة يمكن أن نحلل $K_{(2, 3)}$ و $K_{(3, 3)}$ إلى P_4. ومنه نستنتج أن $K_{(m, n)}$ قابل للتحليل إلى P_4.□

مبرهنة (7-13): البيان K_n قابل للتحليل إلى P_4, إذا وفقط إذا كان $3 < n$ و $n \not\equiv 2(\mod 3)$.

البرهان: واضح أن K_n ليس قابلاً للتحليل إلى P_4 لأجل $n \le 3$. كذلك, إذا كان $n \equiv 2(\mod 3)$, فإن عدد الأضلاع يكون $|E(K_n)| = n(n -1)/2$ وهذا العدد لايقبل القسمة على 3 وبالتالي K_n لايقبل التحليل إلى P_4.

نعلم أن K_4 قابل للتحليل إلى P_4. عندئذٍ ليكن n عدداً صحيحاً موجباً بحيث إن $n \not\equiv 2(\mod 3)$ و $6 \le n$. لدينا حالتان :

حالة 1. $n \equiv 0(\mod 3)$.

عندما يكون n فردياً, عندئذٍ من المبرهنة (7-10), K_n قابل للتحليل إلى $(n$ $-1)/2$ حلقة هاملتونية من الطول n, وكل منها تُحلل إلى P_4. كما أنه من السهل إثبات أن K_6 قابل للتحليل إلى P_4.

عندما n زوجيٌ, يمكن ملاحظة أن $E(K_{6r}) = E(K_{6(r-1)}) \cup E(K_6) \cup E(K_{6(r-1), 6})$. من المبرهنة (12-7). نجد أن $K_{(6(r-1), 6)}$ قابل للتحليل إلى P_4 وباستخدام K_6 والاستقراء الرياضي على r ينتج أن K_{6r} قابل للتحليل إلى P_4.

حالة 2. $n \equiv 1 (\text{mod } 3)$, ليكن $n = 3k + 1$.

لنثبت أولاً أن K_7 قابل للتحليل إلى P_4. لتكن مجموعة رؤوس K_7, $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$. عندئذٍ يمكن تحليله إلى 3 حلقات هاملتونية C_7 بالشكل التالي:

$$C^1 : v_0, v_1, v_2, v_6, v_3, v_5, v_4, v_0,$$
$$C^2 : v_0, v_2, v_3, v_1, v_4, v_6, v_5, v_0,$$
$$C^3 : v_0, v_3, v_4, v_2, v_5, v_1, v_6, v_0.$$

الأضلاع (v_4, v_0) من C^1, (v_0, v_2) من C^2 و (v_2, v_5) من C^3 تشكل P_4. والأضلاع الأخرى من C^1, C^2, C^3 تشكل نسختين من P_4 وبالتالي K_7 قابل للتحليل إلى P_4.

يمكن ملاحظة أن $E(K_{3k+1}) = E(K_{3(k-1)}) \cup E(K_4) \cup E(K_{3(k-1), 4})$, وكل من هذه البيانات قابل للتحليل إلى P_4, لأجل $k \geq 3$ وذلك بحسب المبرهنة (12-7). والحالة (1). وبالتالي نستنتج أن K_{3k+1} قابل للتحليل إلى P_4.□

مبرهنة (14-7): (Gross and Yellen, 2006) بيان العجلة W_n قابل للتحليل إلى P_4, إذا وفقط إذا كان $n \equiv 0 (\text{mod } 3)$.

البرهان: يترك البرهان كتمرين للطالب.□

مبرهنة (7-15): (Gross and Yellen, 2006) البيان K_{2n} غير قابل للتحليل إلى حلقات هاملتونية من الرتبة 2n.

البرهان: يترك البرهان كتمرين للطالب.□

نقبل المبرهنات التالية بدون برهان.

مبرهنة (7-16) (Johansson, 1998): ليكن البيان البسيط $G(p, q)$, بحيث إن $p = p_1 + \ldots + p_k$ و $\lfloor p_1/2 \rfloor + \ldots + \lfloor p_k/2 \rfloor \le \delta(G)$, عندئذٍ يمكن تجزئة رؤوس G إلى k مسار منفصل من الطول $p_1, \ldots, p_k$.

مبرهنة (7-17) (El-Zahar, 1984): ليكن البيان البسيط $G(p, q)$, بحيث إن p $(3 \le p_1, p_2) = p_1 + p_2$ و $\lceil p_1/2 \rceil + \lceil p_2/2 \rceil \le \delta(G)$, عندئذٍ يمكن تجزئة رؤوس G إلى حلقتين منفصلتين من الطول p_1, p_2.

تخمين (7-1) (El-Zahar, 1984): ليكن البيان البسيط $G(p, q)$, بحيث إن $p = p_1 + \ldots + p_k$ $(3 \le p_i)$ و $\lceil p_1/2 \rceil + \ldots + \lceil p_k/2 \rceil \le \delta(G)$, عندئذٍ يمكن تجزئة رؤوس G إلى k حلقه متمايزة من الطول $p_1, \ldots, p_k$.

التخمين (7-1) مازال مفتوحاً.

تمـــــــــاريـــن 7:

1. برهن أن Q_n $(2 \le n)$ له تجزئة مستقلة مثالية.

2. برهن أن Q_n قابل للتحليل إلى r–عامل,إذا وفقط إذا كان $r \mid n$.

3. كم تجزئة مثالية للبيانين $K_{(n, n)}$.

4. كم تجزئة مثالية للبيانين K_{2n}.

5. جد التجزئة المستقلة العظمى لبيان بيترسن, هل هي مثالية وكم تجزئة مثالية له.

6. ارسم بياناً بسيطاً 3-منتظم ليس له تحليل 1-عامل أو 2-عامل.

7. ارسم بياناً بسيطاً 5-منتظم ليس له تحليل 1-عامل أو 2-عامل.

8. بفرض لدينا خمس طلاب S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, حصلوا على الشهادة الثانوية ويتقدمون إلى خمس بعثات لدراسة الاختصاصات الطب M, الهندسة Enge, الرياضيات Math, الفيزياء Ph واللغة الإنكليزية Eng, بحيث إن
   S_1 تقدم لبعثات M, Eng,
   S_2 تقدم لبعثات M, Enge,
   S_3 تقدم لبعثات Enge, Math, Ph,
   S_4 تقدم لبعثات M, Math, Eng,
   S_5 تقدم لبعثات Enge.

   هل يمكن تخصيص بعثة لكل طالب باستخدام مبرهنة هول, وما هي ؟.

9. ليكن الجدولان (A) و (B) التاليان والموضحان للرغبات المفضلة للشباب والفتيات في الارتباط, بيّن الزواج المستقر حسب الخوارزمية (7-1).

w_5	w_4	w_3	w_2	w_1	شباب
5	4	2	3	1	m_1
3	2	5	1	2	m_2
4	5	3	2	1	m_3
4	1	2	3	5	m_4
3	2	5	4	1	m_5

جدول (A), جدول الخيارات الأفضل للشباب

w_5	w_4	w_3	w_2	w_1	فتيات
5	4	1	3	2	m_1
4	5	3	1	2	m_2
2	1	5	3	4	m_3
5	4	1	2	3	m_4
3	5	4	3	1	m_5

جدول (B), جدول الخيارات الأفضل للفتيات

10. أثبت أنه إذا كان للبيانين G, H تحليل 1-عامل, فإن $G + H$ قابل للتحليل إلى 1-عامل.

11. حلل K_5 إلى حلقات C_5 و K_9 إلى حلقات C_9.

12. حلل K_{10} إلى مسارات P_5.

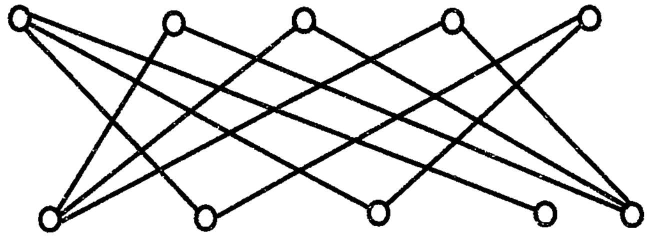
13. أثبت أنه يمكن تحليل K_{2n+1} إلى بيانات نجميه $K_{(1, n)}$.

14. أثبت أنه يمكن تحليل K_{2n} إلى بيانات نجميه $K_{(1, n)}$.

15. أثبت النتيجة (7-2).

16. ارسم بياناً مترابطاً له تحليل 1-عامل أو 2-عامل وليس بياناً هاملتونياً.

17. جد التجزئة العظمى والتغطية مستخدماً نموذج الشبكات للبيان التالي:



18. برهن أنه إذا كان للبيانين G تحليل k-عامل, فإن G × H قابل للتحليل إلى k–عامل وذلك مهما يكن البيان H.

19. أثبت المبرهنة (7-11), باستخدام الاستقراء على n.

20. ماهي مواصفات البيان G الذي يكون قابلاً للتحليل إلى 2-عامل وليس لمتممه تحليل 2-عامل.

21. ارسم بيانين G, H ليس لهما تحليل 1-عامل, لكن G ×H له تحليل 1-عامل.

22. ارسم بيانين G, H ليس لهما تحليل 2-عامل, لكن G ×H له تحليل 2-عامل.

23. أثبت المبرهنة (7-14).

24. أثبت المبرهنة (7-15).

الفصل الثامن

السيطرة والاستقلال في البيان

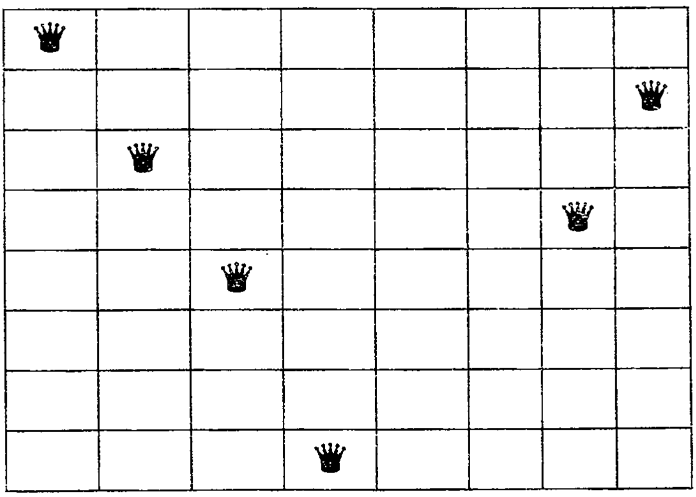
Domination and Independence in Graphs

يهتم هذا الفصل بمسائل مهمة في نظرية البيان، وهي مسألتا السيطرة في البيانات (domination in graphs) والاستقلال في البيانات (independence in graphs).

في الخمس وثلاثين سنة الماضية ترافق تقدم نظرية البيان مع تطور علوم الحاسوب، الالكترونيات وبحوث العمليات. بالطبع كان التسارع في دراسة البيان أكثر حظاً من جهة التقدم في دراسة نظريتي السيطرة والاستقلال في البيانات.
أهمية دراسة السيطرة والاستقلال في البيانات تأتي من الحاجة إلى تقليص عدد المراكز اللازمة لخدمة قطاع معين وبالتالي تقليل التكلفة من خلال عدم بناء مراكز تزيد عن الحد المطلوب لهذه الخدمة. على سبيل المثال، عند بناء مدارس، خزانات مياه، الخ ... لتخديم ريف أحد المدن السورية، يتم دراسة الاتصال بين هذه القرى وتجاورها مع بعضها بعضاً (حيث تُمثل القرى برؤوس البيان والاتصال بينها بإضلاع البيان ويمكن تحميل المسافات بينها على الأضلاع وكذلك عدد سكان كل قرية على الرأس الذي يمثلها). بناءً على دراسة البيان الناتج يمكن تحديد القرى التي سيتم فيها إنشاء مركز كل خدمة من الخدمات المطلوبة وبحيث لايتم بناء مراكز مكررة لنفس الخدمة في قرى وتحرم منها قرى أخرى وكذلك لايتم بناء

مراكز تكون زائدة عن الحاجة وهذا يؤدي بدوره إلى تقليل التكلفة الاقتصادية. وهناك أهمية تطبيقية للسيطرة في البيان تتجلى في معرفة العدد الأقل من محطات الرادار اللازمة لبقاء مجموعة من المواقع الإستراتيجية تحت المراقبة والسيطرة. بالطبع يكون ذلك بتمثيل المواقع ببيان وإيجاد رقم السيطرة له.

بداية الدراسة الرياضية لفكرة السيطرة في البيان كانت في عام 1960, مع العلم أن جذور الموضوع يعود لعام 1862, عندما درس (Jaenisch) مشكلة إيجاد العدد الأقل من الوزراء اللازم لتغطية رقعة شطرنج من القياس n×n بحيث تكون كل المربعات تحت السيطرة وبشرط عدم وجود وزير يسيطر على أخر. حتى الآن هناك حوالي 1800 دراسة تناولت توزع الأحجار على رقعة الشطرنج. الشكل (1-8) يوضح توزيع 6 وزراء على رقعة شطرنج من القياس 8×8.



الشكل (1-8)

تزايد الاهتمام الأكاديمي لنظرية السيطرة في البيان منذ عام 1963, وذلك عندما ظهر تخمين فيزينج (Vizing's conjecture) والذي يطرح السؤال التالي:

رقم السيطرة لجداء بيانين أكبر أو يساوي حاصل جداء رقمي السيطرة لهما ؟.

(1-8) سيطرة رؤوس البيان (Domination of Vertices).

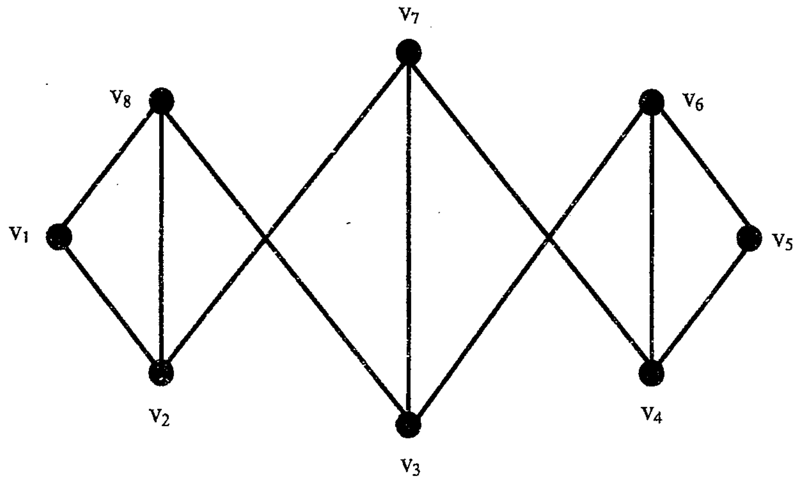
ليكن $G(V, E)$ بياناً بسيطاً مترابطاً لايحتوي على لفات أو أضلاع مضاعفة. ولتكن D مجموعة جزئية من مجموعة رؤوس البيان. نقول عن D إنها مجموعة سيطرة للبيان G (dominating set), إذا كان لأجل كل رأس $v \in V$, أما $v \in D$ أو يوجد رأس $u \in D$ بحيث يكون $uv \in E(G)$. عدد عناصر أصغر مجموعة سيطرة في البيان يسمى عدد السيطرة (domination number) ونرمز له $\gamma(G)$. في بعض المراجع يطلق على ذلك تغطية رأس لرأس (vertex-vertex cover).

تجدر الملاحظة, إن مجموعة رؤوس البيان $V(G)$ هي مجموعة سيطرة للبيان ولكن دائماً نبحث عن مجموعة السيطرة الأقل بعدد عناصرها.

مثال (1-8).

$\gamma(K_n) = 1, \ \gamma(K_{(m, n)}) = 2 : m, n \geq 2.$

مثال (2-8): جد مجموعة السيطرة وعدد السيطرة للبيان الموضح بالشكل (2-8).



الشكل (2-8)

نلاحظ أنه يوجد أكثر من مجموعة جزئية تشكل مجموعة سيطرة وكل منها مكون من رأسين وهي $\{v_2, v_6\}$ و $\{v_4, v_8\}$ ولايوجد مجموعة سيطرة بأقل عناصر من ذلك وبالتالي $\gamma(G) = 2$. بالطبع توجد مجموعات سيطرة أخرى بعدد عناصر أكبر.

نقول عن مجموعة الرؤوس المجاورة للرأس v إنها مجموعة مجاورة مفتوحة للرأس v, ونرمز لها $N(v)$. ونسمي $N[v] = N(v)\cup\{v\}$ مجموعة مجاورة مغلقة للرأس v.

يمكننا أن نعرف السيطرة في البيان اعتماداً على التعريف السابق. لتكن D مجموعة جزئية من مجموعة رؤوس البيان $G(V, E)$, عندئذٍ تكون D مجموعة سيطرة لرؤوس البيان إذا كان $N[D] = V(G)$. عدد السيطرة يكون عدد رؤوس أقل مجموعة D بحيث يكون $N[D] = V(G)$ ونرمز له $\gamma(G)$.

في المثال (1-8) نلاحظ أن $N[v_2, v_6] = V(G)$ و $N[v_4, v_8] = V(G)$. كما أنه لايوجد رأس $u \in V(G)$ بحيث إن $N[u] = V(G)$ ومنه نستنتج أن $\gamma(G) = 2$.

مبرهنة (1-8) (Or 1962): ليكن $G(p, q)$ بياناً بسيطاً مترابطاً ولتكن D أصغر مجموعة سيطرة له. عندئذٍ المجموعة $V(G) - D$ تكون مجموعة سيطرة للبيان G.

البرهان: لتكن D مجموعة سيطرة للبيان G. سوف نبرهن أن المجموعة $V(G) - D$ تشكل مجموعة سيطرة أيضاً. بمعنى أخر لأجل أي رأس $v \in V(G)$, أما أن يكون $v \in V(G) - D$ أو يوجد رأس $u \in V(G) - D$ بحيث يكون $uv \in E(G)$. إذا كان $v \in V(G) - D$ عندئذٍ يتم المطلوب. لنفرض أن $v \notin V(G) - D$, وبالتالي $v \in D$. لدينا D مجموعة سيطرة للبيان G, عندئذٍ يوجد على الأقل رأس $w \in V(G) - D$ بحيث يكون $vw \in E(G)$, وإلا ليس من الضروري أن تكون v في D بحسب تعريف أصغرية D. منه نستنتج مهما تكن $v \in V(G)$ فإنه يوجد رأس $u \in V(G) - D$ بحيث يكون $uv \in E(G)$ وبالتالي $V(G) - D$ مجموعة سيطرة للبيان G.□

نتيجة (1-8): ليكن $G(p, q)$ بياناً بسيطاً مترابطاً, عندئذٍ الحد الأعلى لعدد السيطرة له يحقق $\gamma(G) \le p/2$.

البرهان: يترك البرهان كتمرين للطالب.□

مبرهنة (2-8): مجموعة الرؤوس D تكون مجموعة سيطرة صغرى إذا وفقط إذا كان لأجل كل رأس $u \in D$ يكون أحد الشرطين التاليين صحيحاً:

a) الرأس u يكون رأساً منعزلاً.

b) يوجد هناك رأس $v \in V(G) - D$ بحيث يكون $N(v) \cap D = \{u\}$.

البرهان: $\Leftarrow$: لنفرض أن D مجموعة سيطرة صغرى لرؤوس البيان G. عندئذٍ لأجل أي رأس $u \in D$ تكون $D - \{u\}$ ليست مجموعة سيطرة وهذا يؤدي إلى وجود رأس $v \in V(G) - D$ غير مغطى بأي رأس من $D - \{u\}$. منه نستنتج أما $v = u$ وهذا يعني أن u رأس منعزل عن المجموعة D أو $v \in V(G) - D$. إذا كان الرأس v غير مغطى برأس من $D - \{u\}$ لكن مغطى برأس من D, عندئذٍ الرأس v مغطى فقط بالرأس u من مجموعة السيطرة D. وذلك يؤدي إلى أن $N(v) \cap D = \{u\}$.

$\Rightarrow$: لنفرض أن D مجموعة سيطرة ولأجل كل رأس $u \in D$ يكون أحد الشرطين محققاً. المطلوب إثبات أن D مجموعة سيطرة صغرى.
لنفرض العكس, أي أن D ليست مجموعة سيطرة صغرى, ينتج من هذا أن هناك رأساً $u \in D$ بحيث إن $D - \{u\}$ مجموعة سيطرة. وبالتالي الرأس u مجاور على الأقل لرأس من $D - \{u\}$ وهذا يعني أن الشرط الأول غير صحيح. كذلك إذا كانت $D - \{u\}$ مجموعة سيطرة, عندئذٍ كل رأس في $V(G) - \{D - u\}$ يكون على الأقل مجاور لرأس من $D - \{u\}$ وهذا يؤدي إلى أن الشرط الثاني غير صحيح بالنسبة للرأس u. أي لايوجد رأس $v \in V(G) - \{D - u\}$ بحيث

$N(v) \cap \{D - u\} = \{u\}$. ينتج أن كلا الشرطين غير صحيح وهذا يناقض الفرض وبالتالي D مجموعة سيطرة صغرى.□

مبرهنة (8-3): لأجل أي بيان G(p, q) يكون

$$\left\lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \right\rceil \le \gamma(G) \le p - \Delta(G) .$$

البرهان: لتكن D مجموعة سيطرة صغرى في البيان G. نعلم أن كل رأس يسيطر على نفسه وعلى الرؤوس المجاورة له وبالتالي على الأكثر يسيطر على $\Delta(G)+1$ رأس ومنه نستنتج أن $\gamma(G) \ge \lceil p/(1 + \Delta(G)) \rceil$.

لأجل الحد الأعلى, ليكن v رأس له أكبر درجة في البيان أي أن $\rho(v) = \Delta(G)$ عندئذٍ v يسيطر على N[v] رأس والمجموعة $V(G) - N[v]$ يمكن أن تسيطر على نفسها. بمعنى آخر المجموعة $V(G) - N(v)$, مجموعة سيطرة ومنه نستنتج أن $\gamma(G) \le p - \Delta(G)$.□

ملاحظة (8-1): سوف نقبل في هذا الفصل الكثير من المبرهنات بدون برهان بسبب كثرة عددها وطول برهانها.

مبرهنة (8-4) (Volkmann): لأجل أي بيان G(p, q) يكون

$$\gamma(G) \le \frac{\left(p+1-(\delta(G)-1)\dfrac{\Delta(G)}{\delta(G)} \right)}{2} .$$

مبرهنة (8-5): لأجل أي بيان $G(p, q)$ مترابط يكون

$$\left\lceil \frac{diam(G)+1}{3} \right\rceil \leq \gamma(G).$$

البرهان: لتكن D مجموعة سيطرة صغرى للبيان المترابط G. لندرس مساراً اختيارياً من الطول diam(G). هذا المسار يحتوي على الأكثر ضلعين من البيان الجزئي المحدث $\langle N[v] \rangle$ وذلك مهما يكن الرأس v من D. بما أن D مجموعة سيطرة صغرى, عندئذٍ مسار القطر سوف يحتوي على الأكثر $\gamma(G)$ -1 ضلعاً تربط رؤوس D ببعضها. ينتج من ذلك أن

$$diam(G) \leq 2\gamma(G) + \gamma(G) - 1$$

ومنه نجد $\lceil (diam(G) + 1)/3 \rceil \leq \gamma(G)$.□

مبرهنة (8-6): (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998) ليكن $G(p, q)$ بياناً مترابطاً بحيث $1 \leq diam\ (G) \leq 2$, عندئذٍ

1) إذا كان $diam\ (G) = 2$, فإن $\gamma(G) \leq \delta(G)$,

2) إذا كان $3 \leq \gamma(\overline{G})$, فإن $diam\ (G) \leq 2$.

البرهان: يترك البرهان كتمرين للطالب.□

مبرهنة (8-7): لأجل أي بيان $G(p, q)$ مترابط. إذا كان $diam(G) \geq 3$, عندئذٍ $\gamma(\overline{G})=2$.

البرهان: ليكن x و y رأسين في G بحيث $d(x, y) = diam(G) \geq 3$. واضح أن $\{x, y\}$ مجموعة سيطرة للبيان $\overline{G}$ لأنه لايوجد رأس في G يكون مجاوراً لهمـــا معاً. ومنه ينتج أن $\gamma(\overline{G}) \leq 2$. إذا كان $\gamma(\overline{G})=1$, عندئذٍ G غير متـــرابط وهـــذا يناقض الفرض وهذا يؤدي إلى أن $\gamma(\overline{G})=2$. □

مبرهنة (8-8): (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998) ليكن $G(p, q)$ بياناً مستوياً مترابطاً, عندئذٍ

a) إذا كان $diam(G) = 2$, عندئذٍ $\gamma(G) \leq 3$,

b) إذا كان $diam(G) = 3$, عندئذٍ $\gamma(G) \leq 10$.

مبرهنة (8-9): (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998) مهما يكن البيان G فإن

$$\gamma(G)+\gamma(\overline{G}) \leq p+1,$$

$$\gamma(G)\gamma(\overline{G}) \leq p.$$

مبرهنة (8-10): إذا كان G و $\overline{G}$ لايحتويان على رأس معزول, عندئذٍ

$$\gamma(G)+\gamma(\overline{G}) \leq \lfloor p/2 \rfloor + 2.$$

البرهان: ليكن G و $\overline{G}$ لايحتويان على رأس معزول, عندئذٍ بسهولة نجد أن $\gamma(G) \geq 2$ و $\gamma(\overline{G}) \geq 2$. من النتيجة (8-1) لدينا $\gamma(G) \leq \lfloor p/2 \rfloor$ و $\gamma(\overline{G}) \leq \lfloor p/2 \rfloor$.

إذا كان $\gamma(G) = 2$ أو $\gamma(\overline{G})=2$ فالمبرهنة واضحة. إذا كان $\gamma(G) \geq 4$ و $\gamma(\overline{G})\geq 4$. من المبرهنة (8-9) لدينا $\gamma(G)\gamma(\overline{G})\leq p$ ومنه نحصل على

$$\gamma(G)\leq\lfloor p/\gamma(\overline{G})\rfloor \text{ و } \gamma(\overline{G})\leq\lfloor p/\gamma(G)\rfloor$$

أي أن

$$\gamma(G)\leq\lfloor p/4\rfloor \text{ و } \gamma(\overline{G})\leq\lfloor p/4\rfloor$$

وبالتالي نجد

$$\gamma(G)+\gamma(\overline{G})\leq 2\lfloor p/4\rfloor<\lfloor p/2\rfloor+2.$$

الحالة الأخيرة هي عندما يكون $\gamma(G) = 3$ أو $\gamma(\overline{G})=3$. ليكن $\gamma(G) = 3$, من المبرهنة (8-9) ينتج $\gamma(\overline{G})\leq\lfloor p/3\rfloor$ ومنه نجد

$$\gamma(G)+\gamma(\overline{G})\leq 3+\lfloor p/3\rfloor$$

بما أن $\gamma(G) = 3 \leq \lfloor p/2\rfloor$, نحصل على $6 \leq p$. لكن عندما يكون $6 \leq p$, فإن $3+\lfloor p/3\rfloor\leq\lfloor p/2\rfloor+2$. □

(2-8) تخمين فيزينج (Vizing's Conjecture of Product Graphs).

في هذه الفقرة سوف نوجه اهتمامنا لدراسة الحد الأعلى لعدد السيطرة لجداء بيانين. في عام 1963, قدم فيزينج تخمينه والذي يُعتبر أشهر مسألة مفتوحة في نظرية السيطرة ومازالت حتى الآن وصاغها بالشكل التالي:

تخمين فيزينج (1-8) (Vizing's Conjecture, 1963):

لأجل أي بيانين G و H يكون

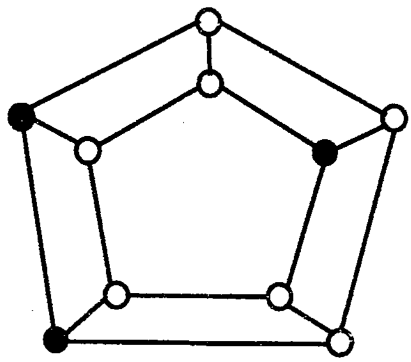
$$\gamma(G\times H) \geq \gamma(G)\,\gamma(H).$$

مثال (8-3). ليكن $G = C_5$ و $H = K_2$, أوجد

$\gamma(G)$, $\gamma(H)$ و $\gamma(G\times H)$

الحل: نلاحظ أن $\gamma(G) = 2$ و $\gamma(H) = 1$.

لنوجد البيان $G\times H$ أي $C_5\times K_2$



الشكل (8-3)

الشكل (8-3) يوضح البيان $C_5\times K_2$, ونلاحظ أن

$$\gamma(C_5\times K_2) = 3 \geq \gamma(C_5)\,\gamma(K_2) = 2.$$

تم إثبات تخمين فيزينج لبعض البيانات المعرفة تعريفاً خاصاً أو التي تحقق

بعض الشروط الخاصة ونذكر بعض النظريات بدون برهان والتي تناولت الموضوع.

مبرهنة (8-11) (Barcalin and German, 1979): ليكن $G(V, E)$ بياناً بسيطاً مترابطاً مع $\gamma(G) = k$. إذا كان هناك تجزئة $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ لرؤوس G بحيث كل مجموعة جزئية $\langle V_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, k)$ تُحدث بياناً جزئياً تاماً, عندئذٍ لأجل أي بيان H يكون $\gamma(G) \gamma(H) \leq \gamma(G \times H)$.

مبرهنة (8-12) (Jacobson and Kinch, 1986): لأجال أي بيان G وأية شجرة T يكون $\gamma(G \times T) \geq \gamma(G) \gamma(T)$.

مبرهنة (8-13) (El-Zahar and Pareek, 1991): لأجل أي بيان G يكون

i) $|V(G)| = \gamma(G \times \overline{G}) \geq \gamma(G) \gamma(\overline{G})$,

ii) $\gamma(G \times H) \geq \gamma(G) \gamma(H)$, إذا كان $\gamma(H) = 2$,

iii) $\gamma(G \times C_n) \geq \gamma(G) \gamma(C_n)$, حيث C_n حلقة من الطول n.

ليكن البيان G، تسمى المجموعة A من الرؤوس k-حزمة (k-packing) إذا كان لأجل أي رأسين x و y من A يكون $d(x, y) > k$. عدد k–حزمة نرمز له p_k ويكون عدد رؤوس أكبر k-حزمة في G.

مير ومون (Meir and Moon), قدما علاقات متنوعة ومهمة بين عدد الحزمة وعدد السيطرة للبيان وبرهنا النتائج التالية:

مبرهنة (14-8) (Meir & Moon, 1975):

i) لأجل أي بيان G، $p_2(G) \leq \gamma(G)$،

ii) لأجل أية شجرة T، $p_2(T) = \gamma(T)$.

بعد محاولات عديدة لبرهان تخمين فيزينج والتي مازالت مسألة مفتوحة، أصبح التوجه لحساب عدد السيطرة لحاصل الجداء الديكارتي لبيانين. هذا الاتجاه قابل للتطبيق في الحياة العملية وأهميته تأتي من تحديد العدد الأقل من المراكز لتغطية قطاع خدمي معين.

البيان الشبكي المستوي (planar grid graph) $P_m \times P_n$، هو حاصل جداء مسارين من الطول m-1 و n-1. تكون مجموعة رؤوس البيان $P_m \times P_n$، مجموعة الثنائيات الصحيحة (i, j) حيث $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ ويكون الرأسان (i, j) و (p, q) متجاورين إذا وفقط إذا كان $|i - p| + |j - q| = 1$. البحث الأول الذي تم من خلاله دراسة عدد السيطرة لجداء بيانين كان في عام 1983، والذي كان من تأليف كل من (Jacobson and Kinch)، في هذا البحث أوجدا عدد السيطرة لـ بيان شبكي من القياس $m \times n$ لأجل $m = 1, 2, 3, 4$ وأية قيمة اختيارية لـ n.

مبرهنة (15-8) (Jacobson and Kinch, 1983):

i) $\gamma(P_1 \times P_n) = \lceil n/3 \rceil$,

ii) $\gamma(P_2 \times C_n) = \lceil (n+1)/2 \rceil$,

iii) $\gamma(P_3 \times P_n) = n - \lfloor (n-1)/4 \rfloor$,

iv) $\gamma(P_4 \times P_n) = n + 1 \ : n = 1, 2, 3, 5, 6, 9$,

$\gamma(P_4 \times P_n) = n \ : n \neq 1, 2, 3, 5, 6, 9.$

بعد ذلك جد كل من (Chang & Clark)، عدد السيطرة لـ $P_m \times P_n$ عندما $m = 5, 6$.

مبرهنة (8-16) (Chang and Clark, 1993):

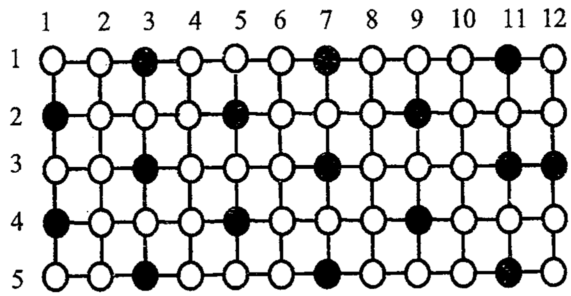
i) $\gamma(P_5 \times P_n) = n + 1 + \lfloor (n+1)/5 \rfloor \ : n = 2, 3, 7,$

$\gamma(P_5 \times P_n) = n + 1 + \lfloor (n+3)/5 \rfloor \ : n \neq 2, 3, 7,$

ii) $\gamma(P_6 \times P_n) = n + 1 + \lfloor (3n+3)/5 \rfloor.$

مثال (8-4). جد $\gamma(P_5 \times P_{12})$، ثم جد مجموعة السيطرة على البيان $P_5 \times P_{12}$.

الحل: من المبرهنة (8-16) نجد أن $\gamma(P_5 \times P_{12}) = 16$. لإيجاد مجموعة السيطرة D للبيان $P_5 \times P_{12}$ بحيث $|D| = 16$ وتسيطر على كامل البيان، نقوم بتوزيع D على رؤوس البيان بشرط أن كل رأس منه إما ينتمي إلى D أو يجاور رأساً من D. لاحظ الشكل (8-4).



الشكل (8-4)

عندما تكون $n \leq 7$, تصبح المسألة أكثر تعقيداً ومازالت بدون حل حتى الآن مع العلم أنه كانت هناك بعض المحاولات لإيجاد الحد الأعلى والحد الأدنى.

البيان الشبكي الحلقي (toroidal grid graph) $C_m \times C_n$ هو حاصل جداء حلقتين من الطول m و n. وتكون مجموعة الرؤوس للبيان $C_m \times C_n$, مجموعة الثنائيات الصحيحة الموجبة (i, j) حيث $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ ويكون الرأسان (i, j) و (p, q) متجاورين إذا وفقط إذا كان

$$|i - p| + |j - q| = 1 \text{ أو } i = p \text{ و } |j - q| = n - 1 \text{ أو } j = q \text{ و } |i - p| = m - 1$$

في هذا المجال تم إيجاد عدد السيطرة لجداء حلقتين. حيث تم في عدة أبحاث متوالية إيجاد عدد السيطرة للبيان الشبكي الحلقي $C_m \times C_n$, لأجل $3 \leq m \leq 10$ وأي قيمة اختيارية لـــ $3 \leq n$.

مبرهنة (8-17) (El-Zahar and Shaheen, 1999, 2007):

i) $\gamma(C_3 \times C_n) = \lceil 3n/4 \rceil$,

ii) $\gamma(C_4 \times C_n) = n$,

iii) $\gamma(C_5 \times C_n) = n \;:\; n \equiv 0 (\text{mod } 5)$,
$\gamma(C_5 \times C_n) = n + 1 \;:\; n \equiv 1, 2, 4 (\text{mod } 5) \;\&\; n = 3$,
$\gamma(C_5 \times C_n) = n + 2 \;:\; n \equiv 3 (\text{mod } 5) \;\&\; n \neq 3$,

iv) $\gamma(C_6 \times C_n) = \lceil 4n/3 \rceil \;:\; n \equiv 0, 1, 4 (\text{mod } 6) \;\&\; n \equiv 5 (\text{mod } 18)$,
$\gamma(C_6 \times C_n) = \lceil 4n/3 \rceil + 1 : n \equiv 2, 3, 5 (\text{mod } 6) \;\&\; n \not\equiv 5 (\text{mod } 18)$.

مبرهنة (8-18) (El-Zahar and Shaheen, 1999, 2007):

i) $\gamma(C_7 \times C_n) = \lceil 3n/2 \rceil \;:\; n \equiv 0, 5, 9 (\text{mod } 14)$,
$\gamma(C_7 \times C_n) = \lceil 3n/2 \rceil + 1 \;:\; n \equiv 1, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 13 (\text{mod } 14)$,

$\gamma(C_7 \times C_n) = 3n/2 + 2 \ : n \equiv 2, 8, 12 (\mathrm{mod}\ 14),$

ii) $\gamma(C_8 \times C_n) = \lceil 9n/5 \rceil \ : n \equiv 0, 4, 9 (\mathrm{mod}\ 10)\ \&$

$n \equiv 13, 18, 22, 23, 31, 32 (\mathrm{mod}\ 40),$

$\gamma(C_8 \times C_n) = \lceil 9n/5 \rceil + 1 : n \not\equiv 0, 4, 9 (\mathrm{mod}\ 10)\ \&$

$n \not\equiv 13, 18, 22, 23, 31, 32 (\mathrm{mod}\ 40),$

iii) $\gamma(C_9 \times C_n) = 2n \ : n \neq 11, 13,$

$\gamma(C_9 \times C_n) = 2n + 1 : n = 11, 13,$

iv) $\gamma(C_{10} \times C_n) = 2n \ : n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 5),$

$\gamma(C_{10} \times C_n) = 2n + 2 : n \equiv 1, 2, 4 (\mathrm{mod}\ 5),$

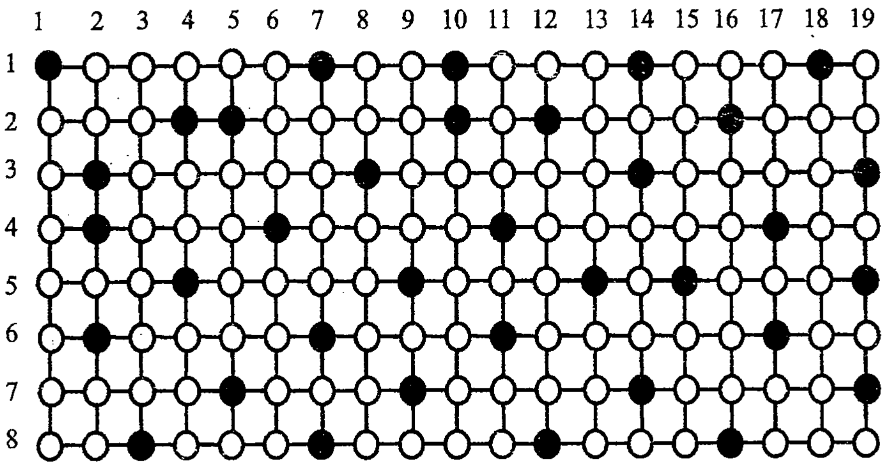
$\gamma(C_{10} \times C_n) = 2n + 4 : n \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 5).$

مثال (8-5). جد $\gamma(C_8 \times C_{19})$, ثم جد مجموعة السيطرة على البيان $C_8 \times C_{19}$.

الحل: من المبرهنة (8-18, ii) نجد أن $\gamma(C_8 \times C_{19}) = \lceil (9 \times 19)/5 \rceil = 35$.

لإيجاد مجموعة السيطرة D للبيان $C_8 \times C_{19}$ بحيث $|D| = 35$ وتسيطر على كامل البيان, نقوم بتوزيع D على رؤوس البيان كما في المثال (8-4). لاحظ الشكل (8-5).

ملاحظة (8-2): عند رسم البيان $C_8 \times C_{19}$, هناك ضلع بين كل رأسين (i, 1) و (i, 19), لأجل $1 \leq i \leq 8$ وكذلك بين كل رأسين (1, j) و (8, j), لأجل $1 \leq j \leq 19$. ولم نرسمهما منعاً للالتباس في الرسم.



الشكل (5-8)

هناك تعاريف للسيطرة مشتقة مباشرةً من التعريف الأساسي السابق وهي تعتبر توسيعاً له.

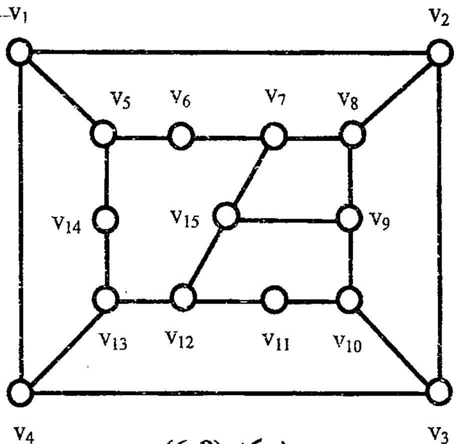
ليكن البيان $G(V, E)$. نقول عن المجموعة الجزئية D من مجموعة رؤوس البيان G, إنها مجموعة سيطرة مضاعفة من الدرجة k, إذا كان لأجل كل رأس $v \in V(G) - D$ يكون $|N(v) \cap D| \geq k$. عندئذٍ نقول عن D, إنها k–مجموعة سيطرة للبيان G (k-dominating set). عدد السيطرة من الدرجة k (k-domination number), $\gamma_k(G)$, يكون عدد أصغر k–مجموعة سيطرة للبيان G.

ونقول عن المجموعة الجزئية D من مجموعة رؤوس البيان G, إنها مجموعة سيطرة بالمسافة k, إذا كان لأجل كل رأس $v \in V(G) - D$ يوجد على الأقل رأس $u \in D$ بحيث يكون $d(v, u) \leq k$, أي أن $N_k[D] = V(G)$ (مجموعة الرؤوس المجاورة لـِ D بمسافة k). عندئذٍ نقول عن D, إنها k–مسافة مجموعة سيطرة

للبيان G ‏(k-distance dominating set). عدد السيطرة من المسافة k ‏(k-distance domination number)، $\gamma_{\le k}(G)$، يكون عدد أصغر k–مسافة مجموعة سيطرة للبيان G.

بينما نقول عن المجموعة الجزئية $D \subseteq V(G)$، إنها مجموعة سيطرة شاملة (global dominating set)، إذا كانت مجموعة سيطرة للبيانين G و $\overline{G}$ بنفس الوقت. عدد السيطرة الشاملة (global domination number)، $\gamma_g(G)$، هو عدد أصغر مجموعة سيطرة شاملة للبيان.

مثال (6-8). جد $\gamma_1(G)$، $\gamma_2(G)$، $\gamma_3(G)$، $\gamma_4(G)$. و $\gamma_{\le 1}(G)$، $\gamma_{\le 2}(G)$، $\gamma_{\le 3}(G)$، $\gamma_{\le 4}(G)$، $\gamma_g(G)$، للبيان G الموضح في الشكل (6-8).



الشكل (6-8)

الحل: $\gamma_1(G) = \gamma(G) = 4$، $\gamma_2(G) = 7$، $\gamma_3(G) = 9$، $\gamma_k(G) = 15$ (حيث $4 \le k$).

$\gamma_{\le 1}(G) = \gamma(G) = 4$، $\gamma_{\le 2}(G) = 2$، $\gamma_{\le 3}(G) = 2$، $\gamma_{\le k}(G) = 1$ (حيث $4 \le k$)،
$\gamma_g(G) = 4$.

على الطالب أن يتأكد من النتائج وذلك بإيجاد مجموعات السيطرة في كل الحالات.

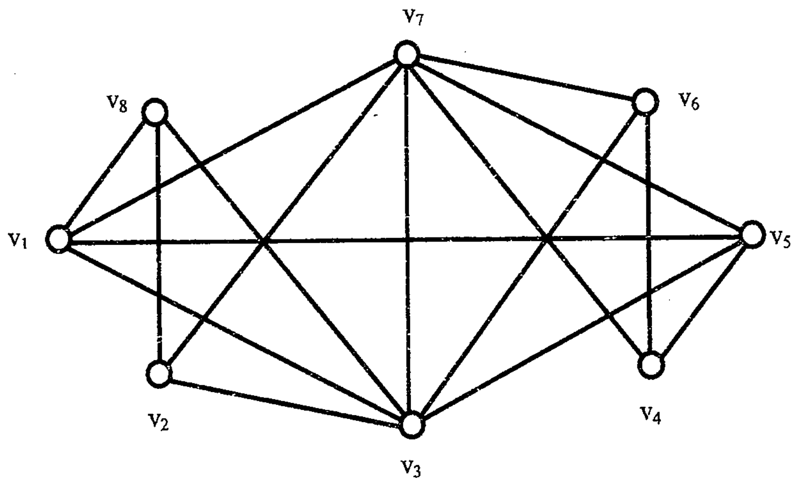
(3-8) السيطرة والاستقلال (Domination and Independence).

لتكن المجموعة B مجموعة جزئية من رؤوس البيان $G(p, q)$, نقول عن B إنها مجموعة مستقلة (independent set) إذا كانت لاتحوي رأسين متجــاورين. بطريقة أخرى, البيان الجزئي المحدث، على رؤوس $\langle B \rangle$ لايحتوي أضلاعاً. بمعنى أخر لأجل أي رأسين $x, y \in B$ المسافة بينهما في G تكــون $d(x, y) \ge 2$. عــدد الاستقلال للرؤوس $\beta_0(G)$, يكون عدد أكبر مجموعة مستقلة في البيان G.
وبالأسلوب نفسه يمكن أن نعرف مجموعة الاستقلال للأضلاع B_1 وعدد الاستقلال للأضلاع $\beta_1(G)$. يطلق أيضاً على مجموعة الأضلاع المستقلة في البيان بالتجزئة المستقلة (matching). إذا كان $\beta_1(G) = p/2$ عندئذٍ نسمي التجزئة مستقلة مثالية (perfect matching).

مثال (7-8).

$\beta_0(K_n) = 1, \ \beta_0(K_{(m, n)}) = \max\{m, n\}$.
$\beta_0(P_n) = \lceil n/2 \rceil, \ \beta_0(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$.
$\beta_1(P_n) = \lfloor n/2 \rfloor, \ \beta_1(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$.

مثال (8-8): جد عدد الاستقلال للرؤوس وللأضلاع للبيان الموضح بالشكل (7-8).



الشكل (7-8)

الحل: نلاحظ أنه يوجد أكثر من مجموعة جزئية تكون مستقلة وأكبرها مكون من ثلاثة رؤوس وهي $\{v_1, v_2, v_4\}$، $\{v_1, v_2, v_6\}$، $\{v_2, v_5, v_6\}$ و $\{v_5, v_6, v_8\}$ ولايوجد مجموعة مستقلة بأكثر من ثلاثة عناصر وبالتالي $\beta_0(G) = 3$.

بالنسبة للأضلاع المجموعة $\{(v_1, v_3), (v_4, v_5), (v_6, v_7), (v_2, v_8)\}$ وهي أكبر مجموعة أضلاع مستقلة في البيان وبالتالي $\beta_1(G) = 4$. لماذا لايوجد مجموعة مستقلة أكبر ؟.

لتكن المجموعة C مجموعة جزئية من رؤوس البيان $G(p, q)$, نقول عن C إنها مجموعة تغطية (cover vertex), إذا كان كل ضلع في G يقع على الأقل

على رأس في C. عدد التغطية الرؤوس–للأضــلاع $\alpha_0(G)$, يكــون عــدد أقــل مجموعة تغطية في البيان G.

وبالأسلوب نفسه يمكن أن نعرف مجموعة التغطية مــن الأضـــلاع للــرؤوس C_1 وعدد التغطية الأضلاع–للرؤوس $\alpha_1(G)$. واضح أن $\alpha_1(G) \geq \lceil p/2 \rceil$ لماذا ؟.

مثال (8-9). جد عدد التغطية الرؤوس–للأضلاع $\alpha_0(G)$ و $\alpha_1(G)$ الأضلاع-للرؤوس للبيان الموضح بالشكل (8-7).

الحـــل: نلاحظ أن مجموعة الرؤوس $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7\}$ تغطي أضلاع البيــان ولايوجد مجموعة من أربعــة رؤوس ويمكــن أن تغطـــي الأضــلاع وبالتـــالي $\alpha_0(G) = 5$.

بالنسبة لحساب $\alpha_1(G)$, نبحث عن أصغر مجموعة من الأضلاع والتـــي تغطـــي الرؤوس. نلاحظ أن المجموعة $\{(v_1, v_8), (v_2, v_3), (v_4, v_5), (v_6, v_7)\}$ تغطـــي الرؤوس وبما أن $\alpha_1(G) \geq \lceil p/2 \rceil$, ينتج $\alpha_1(G) = 4$.

المبرهنة التالية هي أكثر من مبرهنة في مبرهنة واحدة ونقبلها بدون برهان.

مبرهنة (8-19): ليكن $G(p, q)$ بياناً بسيطاً مترابطاً, عندئذٍ

i) $\gamma(G) \leq \alpha_0(G)$,

ii) $\gamma(G) \leq \beta_0(G)$,

iii) $\gamma(G) \leq \alpha_1(G)$,

iv) $\gamma(G) \leq \beta_1(G)$,

v) $\alpha_0(G) + \beta_0(G) = p$,

vi) $\alpha_1(G) + \beta_1(G) = p$.

اعتماداً على تعريف مجموعة السيطرة ومجموعة الاستقلال, يمكننا أن نعرف مجموعة السيطرة المستقلة للبيان G, وهي مجموعة سيطرة للبيان بشرط أن لاتحتوي على رأسين متجاورين. ويكون عدد السيطرة المستقل للبيان G, $i(G)$ هو عدد رؤوس أصغر مجموعة سيطرة مستقلة.

مبرهنة (8-20): لتكن D مجموعة جزئية من رؤوس البيان $G(p, q)$, عندئذٍ تكون D أكبر مجموعة مستقلة إذا وفقط إذا كانت مجموعة سيطرة مستقلة للبيان G.

البرهان: واضح أنه إذا كانت D أكبر مجموعة مستقلة, فعندئذٍ تكون مجموعة سيطرة مستقلة.
لنثبت العكس, لتكن D مجموعة سيطرة مستقلة ولنبرهن أنها أكبر مجموعة مستقلة. إذا لم تكن أكبر مجموعة مستقلة, عندئذٍ يوجد رأس $u \in V(G) - D$ بحيث تكون المجموعة $D \cup \{u\}$ مجموعة مستقلة وبالتالي لايوجد رأس في D مجاور للرأس u ومنه نستنتج أن D ليست مجموعة سيطرة وهذا مناقض للفرض.

مبرهنة (8-21): (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998) من أجل أي بيان G يكون $\gamma(L(G)) = i(L(G))$.

مبرهنة (8-22): إذا كان البيان G لايحتوي البيان النجمي (star graph) $K_{1,k+1}$

(حيث $2 \le k$) كبيان جزئي محدث, عندئذٍ

$$i(G) \le (k-1)\,\gamma(G) - (k-2).$$

البرهان: لتكن D أصغر مجموعة سيطرة للبيان G و B أكبر مجموعة مستقلة من الرؤوس في $\langle D\rangle$. لتكن X مجموعة رؤوس من $V(G) - D$ بحيث B لاتسيطر عليها ولتكن Y اكبر مجموعة مستقلة في $\langle X\rangle$. كل رأس $u \in D - B$ على الأكثر يجاور k -1 رأس من Y, وإلا فالرؤوس u مع k رأس من Y بالإضافة لرأس من B يحدثون بياناً جزئياً $K_{1,k+1}$. علاوةً على ذلك يكون $|Y| \le (k-1)\,|D-B|$ ومنه نجد

$$i(G) \le |Y| + |B| \le (k-1)(\gamma(G) - |B|) + |B|$$
$$= (k-1)\gamma(G) - (k-2)|B| \le (k-1)\gamma(G) - (k-2).\square$$

ليكن البيان $G(V, E)$, نقول عن مجموعة السيطرة D للبيان G, أنها مثالية (domination perfect) إذا كان $\gamma(G) = i(G)$.

مثال (8-10). نلاحظ من البيان في الشكل (8-7), لدينا $\gamma(G) = i(G) = 2$ وبالتالي للبيان سيطرة مثالية.

مبرهنة (8-23) (A. Klobucar):

i) $i(P_n) = \lceil n/3 \rceil$,
$i(P_m \otimes P_n) = i(P_m)\, i(P_n)$.

ii) $i(P_m \otimes P_n) = i(P_m)\, i(P_n)$.

لقد كتبت أبحاث كثيرة تناولت جميعها بالتفصيل دراسة تعقيد مختلف أنـــواع السيطرة وجميع هذه الدراسات, أثبتت أن مشكلة السيطرة من التعقيد (NP-hard). حيث إن (M. Garey & D. Johnson, 1979) , هما أول من بحث فـــي تعقيـــد مشكلة السيطرة في البيان وأثبتا أنها (NP-complete), أي من التعقيد NP. ثـــم أثبت (D. Johnson, 1985) أن إيجاد رقم السيطرة لبيان شبكي هو من التعقيـــد (NP-complete).

خوارزمية (1-8) خوارزمية حساب رقم ومجموعة السيطرة للبيان G(V, E)
(Algorithm for computing the domination number and minimum dominating set of a graph G)

المعطيات: G(V, E) بيان مترابط و $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ مجموعة رؤوسه، و $\Delta(G)$ أكبر درجة رأس.

المخرجات: عدد ومجموعة السيطرة للبيان G(V, E).

<u>خطوات الخوارزمية:</u>

-1 اكتب مصفوفة التجاور للرؤوس $A(G) = [a_{ij}]$.

-2 $B(G) = A(G) + I_p$, حيث I_p مصفوفة من الرتبة p×p, فيها عناصر القطر الرئيسي تساوي 1 وباقي العناصر أصفار.

-3 $k = \lceil p/(1 + \Delta(G)) \rceil$.

-4 $B_k(G)$ مصفوفة جزئية فيها k سطر من B(G) وكل سطر فيها R_{ij} حيث $j = 1, \ldots, k$, و i أدلة الرؤوس الموافقة للأسطر.

(كل المصفوفات الجزئية من القياس $k \times p$ من المصفوفة $B(G)$).

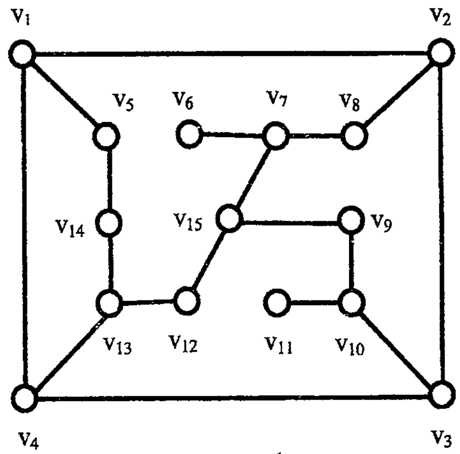
-5 $R_{i,1} + \ldots + R_{i,k} = (b_1, \ldots, b_p)$.

-1.5 إذا كان $b_h = 0$ لبعض $h = 1, \ldots, p$, خذ المصفوفة الجزئية التالية من القياس $k \times p$, واذهب إلى 4 وإلا اذهب إلى 7.

-6 إذا كان $b_h = 0$ لبعض $h = 1, \ldots, p$, لأجل كل المصفوفات الجزئية B_k, عندئذٍ ضع $k \leftarrow k + 1$ واذهب إلى 4.

-7 اطبع $\gamma(G) = k$, ومجموعة السيطرة $D = \{v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{ik}\}$.

مثال (8-11): جد رقم ومجموعة السيطرة للبيان G الموضح بالشكل (8-8).



الشكل (8-8)

الحل: نلاحظ أن $\gamma(G) = 4$.

لنرى ذلك بحسب الخوارزمية (8-1).

-1 نكتب مصفوفة التجاور للرؤوس $A(G) = [a_{ij}]$.

$$A(G) = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

-2 نكتب $B(G) = A(G) + I_p$.

$$B(G) = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

-3 $k = \lceil p/(1 + \Delta(G)) \rceil = 4$.

-4 نحسب مجموع الأسطر في كل المصفوفات $B_4(G)$ ابتداءاً من الأسطر الأربعة الأولى.

$$B_4(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

-5 $R_{1,1} + R_{2,2} + R_{3,3} + R_{4,4} = (3, 3, 3, 3,1, 0, 0,1, 0,1, 0, 0,1,0,0)$.

-1.5 نلاحظ أن $b_h = 0$ لبعض $h = 1, \ldots, p$, خذ المصفوفة الجزئية التالية من القياس $k \times p$, واذهب إلى 4.

-4 نأخذ المصفوفات $B_4(G)$ التالية

$$B_4(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

-5 $R_{1,1} + R_{2,2} + R_{3,3} + R_{5,4} =(3, 3, 2, 2,2, 0, 0,1, 0,1, 0, 0,0, 1, 0)$.

-1.5 نلاحظ أن $b_h = 0$ لبعض $h = 1, \ldots, p$, خذ المصفوفة الجزئية التالية من القياس $k \times p$, واذهب إلى 4.

4- نأخذ المصفوفات $B_4(G)$ التالية

$$B_4(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5- $R_{1,1} + R_{7,2} + R_{10,3} + R_{13,4} = (1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$.

1.5- نلاحظ أن $b_h > 0$ لأجل كل $h = 1, \ldots, p$, عندئذٍ اذهب إلى 7.

7- اطبع $\gamma(G) = 4$, ومجموعة السيطرة $D = \{v_{1,1}, v_{7,2}, v_{10,3}, v_{13,4}\}$
أي أن $D = \{v_1, v_7, v_{10}, v_{13}\}$.

هذه الخوارزمية تعطينا رقم السيطرة ومجموعة السيطرة لأي بيان، لكن سرعة تنفيذها بطيئة. تحسب رقم السيطرة الدقيق وتعطي أقل مجموعة سيطرة لأي بيان. زمن حساب رقم السيطرة لبيان شبكي حلقي بهذه الخوارزمية يكون كبيراً. كمثال على ذلك: لحساب $\gamma(C_4 \times C_5)$ يلزم 1 ثانية، لحساب $\gamma(C_5 \times C_5)$ يلزم 4 ثانية ولحساب $\gamma(C_6 \times C_6)$ يلزم 2.25 دقيقة. حيث زمن تنفيذ الخوارزمية يتعلق بعدد الرؤوس وأكبر درجة رأس في البيان. حيث يتزايد مع ازدياد عدد الرؤوس ويتناقص مع ازدياد أكبر درجة رأس للبيان G.

(4-8) تعريف ببعض أنواع السيطرة (Several of Dominations).

هناك الكثير من التعاريف لمفهوم السيطرة في البيان والتي تزيد على 63 تعريفاً. درسنا في الفقرة السابقة أهم أنواعها والأكثر تناولاً في الدراسة والبحث. هنا سوف نورد بعض أنواع السيطرة والتي لها علاقة وثيقة بالمفهوم الأساسي للسيطرة.

(8-4-1) السيطرة الكاملة (Total domination).

ليكن البيان $G(V, E)$ ولتكن D مجموعة من رؤوسه. نقول إن D مجموعة سيطرة كاملة (total dominating) إذا كان لأجل كل رأس $v\in V(G)$ يوجد رأس $u\in D$ بحيث يكون $uv\in E(G)$, بمعنى أخر $N(D) = V(G)$. ويكون عدد السيطرة الكاملة للبيان G, $\gamma_t(G)$, معرف بالشكل التالي

$$\gamma_t(G) = \min\{|D| : D \subseteq V(G) \ \& \ V(G) = N(D)\}.$$

لتكن X مجموعة من رؤوس البيان وليكن $u\in X$. نقول إن الرأس v مجاور خاص للرأس u بالنسبة لـ X إذا كان $N[v]\cap X = \{u\}$. كذلك نعرف مجموعة المجاورات الخاصة للرأس u بالنسبة للمجموعة X بالشكل التالي $pn[u, X] = \{v : N[v]\cap X = \{u\}\}$. نلاحظ أن $u\in pn[u, X]$ إذا كان الرأس u رأساً معزولاً في $\langle X\rangle$.

مبرهنة (8-24) (Cockayne): ليكن البيان المترابط $G(p, q)$, حيث $3 \le p$, عندئذٍ

$$\gamma_t(G) \le 2p/3.$$

البرهان: لتكن D أصغر مجموعة سيطرة كاملة للبيان G. بأصغرية D, كل رأس $v \in D$ إما يكون له مجاور خاص أو البيان الجزئي المحدث $\langle D - v \rangle$ يحتوي على رأس معزول.

ليكن $W = \{v \in D : pn[v, D] \neq \emptyset\}$. ولتكن B مجموعة الرؤوس المعزولة في $\langle W \rangle$, ولنضع $A = W - B$. لتكن X أقل مجموعة من الرؤوس في $D - W$ بحيث كل رأس في B يكون مجاوراً لبعض الرؤوس في X. نلاحظ أن $|X| \leq |B|$. ليكن $S = D - (W \cup X)$. من تعريف S نجد أن $\gamma_t(\langle S \rangle) = |S|$ وبالتالي يكون $\langle S \rangle = h K_2$ حيث $0 \leq h$.

ليكن $a_i b_i$ حيث $1 \leq i \leq h$, مجموعة الأضلاع المتمايزة في $\langle S \rangle$. بدون التقليل من عمومية المسألة, ينتج من الترابط في البيان أن كل رأس a_i يجاور بعض الرؤوس الأخرى x_i. إذا كان $x_i \in W \cup X$, عندئذٍ $D - \{b_i\}$ تكون مجموعة سيطرة كاملة اصغر من D وهذا تناقض. أي أن $x_i \in V(G) - D$. إذا كان $x_i = x_j$ لأجل $i \neq j$, عندئذٍ $D - \{b_i, b_j\} \cup \{x_i\}$ تكون مجموعة سيطرة كاملة وهذا تناقض مشابه للسابق. من تعريف S, كل x_i تكون مجاورة على الأقل لرأسين من D ومن تعريف W, يوجد على الأقل $|W|$ رأس من $V(G) - D$ تكون مجاورة لرأس واحد فقط من D. يؤدي ذلك إلى أن

$$|W| + h \leq |V - D|.$$

ومنه

$$|A| + |B| + h \leq p - \gamma_t(G). \qquad (*)$$

أيضاً لدينا

$$\gamma_t(G) = |A| + |B| + |X| + |S|$$
$$= (|A| + |B| + h) + (|X| + h).$$

لأن $|X| \le |A| + |B|$, عندئذٍ يكون

$$\gamma_t(G) \le 2(|A| + |B| + h).$$

من (*) نجد أن

$$\gamma_t(G) \le 2(p - \gamma_t(G)).$$

ومنه ينتج

$$\gamma_t(G) \le 2p/3. \square$$

نقبل المبرهنات التالية بدون برهان.

مبرهنة (25-8): (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998) ليكن البيان المترابط $G(p, q)$, حيث $3 \le p$, عندئذٍ

$$\gamma_t(G) \le p - \Delta(G),$$
$$i(G) + \gamma_t(G) \le p.$$

مبرهنة (26-8) (S. Gravier):

i) $\gamma_t(P_1 \times P_n) = 2\lfloor n/4 \rfloor + 1 : \; n \equiv 1 (\text{mod } 4),$
$\gamma_t(P_1 \times P_n) = 2\lceil n/4 \rceil : \; n \not\equiv 1 (\text{mod } 4),$

ii) $\gamma_t(P_2 \times P_n) = 2\lfloor (n+2)/3 \rfloor,$

iii) $\gamma_t(P_3 \times P_n) = n,$

مبرهنة (27-8) (A. Klobucar):

i) $\gamma_t(P_4 \times P_n) = 6\lfloor n/5 \rfloor + 2 : \; n \equiv 0, 1 (\text{mod } 5),$
$\gamma_t(P_4 \times P_n) = 6\lfloor n/5 \rfloor + 4 : \; n \equiv 2 (\text{mod } 5),$
$\gamma_t(P_4 \times P_n) = 6\lceil n/5 \rceil \quad : \; n \equiv 3, 4 (\text{mod } 5).$

ii) For $n \ge 5$

$\gamma_t(P_5 \times P_n) = \lfloor (3n+4)/2 \rfloor : n \neq 6,$
$\gamma_t(P_5 \times P_n) = 10 \quad : n = 6,$

iii) For $n \geq 6$

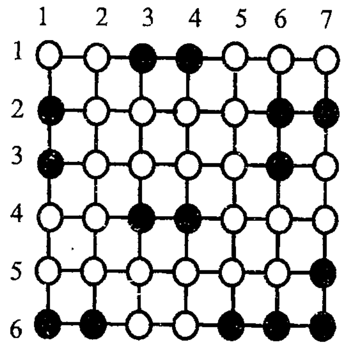
$\gamma_t(P_6 \times P_n) = \lfloor (12n+21)/7 \rfloor.$

ملاحظة (3-8): $\gamma_t(P_m \times P_n)$, عندما $7 \leq m$ غير معروفة ومازالت تنتظر الحل.

مثال (12-8). جد $\gamma_t(P_6 \times P_7)$ ووضح ذلك بالرسم.

الحل: نلاحظ أن $\gamma_t(P_6 \times P_7) = 15$.

لتوضيح الرسم, نرسم البيان $P_6 \times P_7$ ونوزع رؤوس السيطرة على 15 رأساً بحيث تحقق شروط السيطرة الكاملة, لاحظ الشكل (9-8).



الشكل (9-8)

(2-4-8) السيطرة المترابطة (Connected domination).

ليكن البيان $G(V, E)$ ولتكن D مجموعة من رؤوسه. نقول إن D مجموعة سيطرة مترابطة (connected dominating) إذا كانت D مجموعة سيطرة والبيان المحدث $\langle D \rangle$ يكون مترابطاً. ويكون عدد السيطرة المترابطة للبيان G، $\gamma_c(G)$، عدد أصغر مجموعة سيطرة مترابطة في البيان G.

مثال (8-13). نلاحظ البيان في الشكل (8-7) لدينا $\gamma_c(G) = 2$.

مبرهنة (8-28) (Hedetniemi & Laskar): ليكن $G(V, E)$ بياناً مترابطاً، عندئذٍ

$$\text{diam}(G) - 1 \le \gamma_c(G) \le 2\beta_1.$$

البرهان: لإثبات الحد الأدنى، نفرض أن $\text{diam}(G) = k$ وليكن $u,v \in V(G)$ بحيث إن $d(u, v) = k$. لتكن D مجموعة سيطرة مترابطة للبيان G. يعتمد البرهان على وضعية انتماء u, v لـ D.

إذا كان $u, v \in D$ عندئذٍ بما أن $\langle D \rangle$ مترابطة، فإن $|D| \ge k + 1$. إذا كان $u \in D$ و $v \notin D$ عندئذٍ بما أن v يجب أن تجاور على الأقل رأساً من D، ينتج $|D| \ge k$. إذا كان $u,v \notin D$ عندئذٍ كل منهما يجاور على الأقل رأساً من D وبالتالي $|D| \ge k - 1$. منه نستنتج أن $\text{diam}(G) - 1 \le |D|$.

لإثبات الحد الأعلى، لتكن M أكبر مجموعة مستقلة من الأضلاع في G و B أكبر مجموعة رؤوس في أكبر مركبة من $\langle V(M) \rangle$. لنفرض أن $\langle V(M) \rangle$ ليست مترابطة. إذا كان T شجرة موسعة للبيان G، عندئذٍ يوجد مركبة B_1 من $\langle V(M) \rangle$ بحيث إنها ترتبط مع B بالمسار vuv_1 بحيث إن $uv, uv_1 \in E(T)$ و $v \in B$ وكذلك $v_1 \in B_1$. لدينا $u \notin V(M)$ (لأنها لو كانت $u \in V(M)$، عندئذٍ M لن تكون

مستقلة). الآن نبدل في M الضلع الواقع على v_1 بالضلع uv_1, عندئذٍ نحصل على مجموعة أضلاع مستقلة أخرى وهي M_1. لدينا $\langle V(B)\cup\{u, v_1\}\rangle$ مترابط وبالتالي في $\langle V(M_1)\rangle$ يوجد مركبة أكبر من B وهذا يناقض فرضنا في اختيار M و B.$\square$

مبرهنة (8-29): (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998)

ليكن G(V, E) بياناً مترابطاً, عندئذٍ

$$\gamma_c(G) \le 2\beta_0 - 1,$$
$$\gamma_c(G) \le 3\gamma(G).$$

(8-4-3) مجموعات السيطرة المنفصلة في البيان (Domatic sets):

ليكن البيان G(V, E). نقول عن التجزئة $V(G) = V_1\cup \ldots\cup V_k$ لرؤوس البيان G, إنها تجزئة سيطرة منفصلة (domatic set) إذا كانت كل مجموعة جزئية V_i (حيث $1 \le i \le k$) تشكل مجموعة سيطرة للبيان G. ويكون عدد مجموعات السيطرة (domatic number) هو أكبر قيمة لـ k بحيث كل مجموعة جزئية V_i تكون مجموعة سيطرة ونرمز لذلك do(G). بمعنى أخر تجزئة مجموعة رؤوس البيان V(G) إلى أكبر عدد من المجموعات المنفصلة والتي تكون كل منها مجموعة سيطرة للبيان G.

بنفس الشكل يمكن أن نعرف عدد مجموعات السيطرة التامة للبيان G (total domatic number), $do_t(G)$. كما أن عدد مجموعات السيطرة

المترابطة (connected domatic number) يكون $do_c(G)$. و عدد مجموعات السيطرة المستقلة (independent domatic number) يكون $do_i(G)$.

مثال (8-14). $do(K_p) = p, do(P_n) = 2$.

مبرهنة (8-30): إذا كان $2 \le n \le m$, عندئذٍ

$$do(P_m \times P_n) = 2 : m = 2, 4 \; \& \; n = 2,$$
$$do(P_m \times P_n) = 3 : m, n \neq 2.$$

البرهان: واضح أن $do(P_2 \times P_2) = do(P_4 \times P_2) = 2$.

بسهولة نجد أن $do(G_1 \cup G_2) = \min\{do(G_1), do(G_2)\}$. كذلك إذا كان H بياناً موسعاً جزئياً للبيان G, عندئذٍ $do(H) \le do(G)$.

لأجل للبيان $P_m \times P_n$ (حيث إن $m, n \neq 2$).

لنفرض أن m عدد فردي وليكن

$$D_1 = \{(i, j) : i \equiv 0 (\text{mod } 2) \; ; 2 \le i \le m\},$$

$$D_2 = \{(i, j) : i \equiv 1 (\text{mod } 4) \; \& \; j \equiv 1 (\text{mod } 2); 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$$
$$\cup \{(i, j) : i \equiv 3 (\text{mod } 4) \; \& \; j \equiv 0 (\text{mod } 2); 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\},$$

$$D_3 = \{(i, j) : i \equiv 1 (\text{mod } 4) \; \& \; j \equiv 0 (\text{mod } 2); 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$$
$$\cup \{(i, j) : i \equiv 3 (\text{mod } 4) \; \& \; j \equiv 1 (\text{mod } 2); 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}.$$

نلاحظ أن كل مجموعة من D_1, D_2, D_3 تشكل مجموعة سيطرة للبيان $P_m \times P_n$ وهي منفصلة. إذاً $\{D_1, D_2, D_3\}$ تشكل تجزئة سيطرة للبيان $P_m \times P_n$. بنفس

الطريقة نجد ثلاث مجموعات تشكل تجزئة سيطرة للبيان $P_m \times P_n$. ومنه نستنتج أن $do(P_m \times P_n) = 3$.

لنفرض أن كل من m و n يكون عدداً زوجياً. بسهولة يمكن التأكد أن $do(P_4 \times P_4) = 3$.

نفرض أن $6 \le m$. بما أن $(P_3 \times P_n) \cup (P_{m-3} \times P_n)$ يكون بياناً جزئياً موسعاً للبيان $P_m \times P_n$. كذلك $do(P_3 \times P_n) = do(P_{m-3} \times P_n) = 3$ بحسب الحالة السابقة. نستنتج أن

$$do(P_m \times P_n) \ge do((P_3 \times P_n) \cup (P_{m-3} \times P_n))$$
$$\ge \min\{do(P_3 \times P_n), do(P_{m-3} \times P_n)\} = 3. \square$$

مبرهنة (8-31): (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998) مهما يكن البيان G فإن

$$do(G) + do(\overline{G}) \le p \ : G \ne K_p,\ \overline{G} \ne K_p,$$
$$do(G) + do(\overline{G}) = p + 1 \ : G \cong K_p \text{ or } \overline{G} \cong K_p.$$

مبرهنة (8-32): ليكن البيان G(p, q) بحيث $4 \le p$، عندئذٍ

$$2 \le do(G)\, do(\overline{G}) \le p^2/4.$$

البرهان: لدينا $4 \le p$، عندئذٍ على الأقل بيان من البيانين G و $\overline{G}$ لايحتوي على رأس معزول وبالتالي يملك تجزئتي سيطرة منفصلة له. ينتج أن $2 \le do(G)\, do(\overline{G})$. لإثبات الحد الأعلى نستخدم المبرهنة (8-31). إذا كان $G \cong K_p$ أو $G \cong \overline{K_p}$، عندئذٍ $do(G)do(\overline{G}) = p \le p^2/4$ (حيث $4 \le p$).

لنفرض أن $G \ne K_p$ أو $G \ne \overline{K_p}$. من المبرهنة (8-31) ينتج لدينا $do(G) + do(\overline{G}) \le p$. باستخدام خواص المتوسط الهندسي نجد

$$\sqrt{do(G)\,do(\overline{G})} \le \frac{do(G)+do(\overline{G})}{2} \le \frac{p}{2}.$$

هذا يؤدي إلى أن

$$do(G)\,do(\overline{G}) \le p^2/4. \square$$

مبرهنة (8-33): (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998) ليكن البيان G(p, q) بحيث $2 \le do_t(G)$, عندئذٍ $\gamma_t(G) + do_t(G) \le \lfloor p/2 \rfloor + 2$.

مبرهنة (8-34): (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998) ليكن البيان G(p, q) بحيث إن $2 \le do_t(G)$, عندئذٍ $\gamma_t(G) + do_t(G) \le \lfloor p/2 \rfloor + 2$.

(8-5) السيطرة الموزونة (الناقصة والمرمزة)

(Weighted Domination (Minus and Signed Domination)).

هنا ندرس السيطرة بعد أن نُحمل الرؤوس بأوزان أو قياسات. ليكن البيان G(V, E). نسمي الدالة g المعرفة على مجموعة الرؤوس V(G), دالة السيطرة الناقصة (minus dominating function) إذا كان

$g : V(G) \to \{-1, 0, 1\}$, عندئذٍ يكون $g(N[v]) \ge 1 : \forall\, v \in V(G)$

وعدد السيطرة الناقصة (minus domination number), $\gamma^-(G)$, يعطى بالعلاقة

$$\gamma^-(G) = \min\,\{\textstyle\sum_{u \in N[v]} g(u) : g \text{ is a minus dominating function}\}.$$

بشكل مشابه نعرف السيطرة المرمزة. نسمي الدالة g المعرفة على مجموعة الرؤوس $V(G)$, دالة السيطرة المرمزة (signed dominating function) إذا كان $g : V(G) \rightarrow \{-1, 1\}$, عندئذٍ يكون $g(N[v]) \geq 1 : \forall\ v \in V(G)$

وعدد السيطرة المرمزة (signed domination number), $\gamma_s(G)$, يعطى بالعلاقة

$$\gamma_s(G) = \min \{\sum_{u \in N[v]} g(u) : g \text{ is a signed dominating function}\}.$$

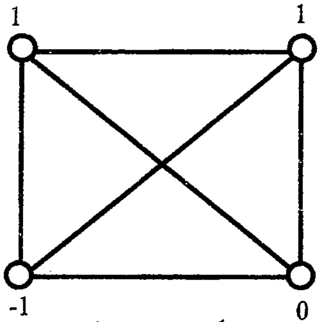
في كلا التعريفين يمكن أن نطلق على الدالة g دالة الوزن للرأس v ويمكن أن نرمز لها $W(v) = g(v)$, أي وزن الرأس v.

مثال (8-15). جد $\gamma_s(K_4)$ و $\gamma^-(K_4)$.

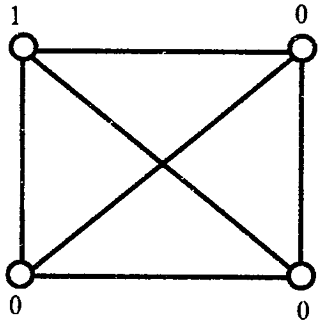
الحل: إذا أعطينا لرأس واحد فقط من رؤوس K_4 الوزن 1- ولبقية الرؤوس الوزن 1 فإن $g(N[v]) \geq 1$ لكل رأس من رؤوس K_4. ومنه ينتج $\gamma_s(K_4) \leq \{\sum_{u \in N[v]} g(u)\} = 2$. من جهة أخرى لايمكن أن نعطي الوزن 1- لرأسين في K_4 لأن ذلك يؤدي إلى $g(N[v]) = 0$ وذلك لجميع الرؤوس ومنه ينتج $\gamma_s(K_4) \geq 2$. وبالتالي نستنتج أن $\gamma_s(K_4) = 2$, لاحظ الشكل (10-8, a).

لحساب $\gamma^-(K_4)$ نعطي رأساً واحداً فقط الوزن 1 ولبقية الرؤوس الوزن 0, عندئذٍ نجد أن $g(N[v]) \geq 1$ و $\gamma^-(G) = \min \{\sum_{u \in N[v]} g(u)\} = 1$, لاحظ الشكل (10-8, b). أو نعطي الوزن 0 لرأس من K_4 والوزن 1- لرأس أخر والوزن 1+ للرأسين الباقيين ويمكن أن نتأكد أن $g(N[v]) \geq 1$ لأجل كل رأس $v \in V(G)$.

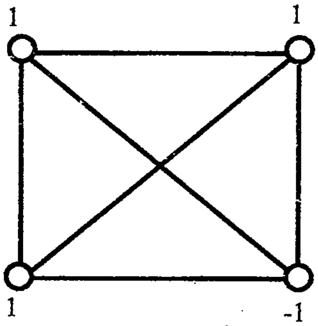
ومنه ينتج $\gamma^-(G) = \min \{\sum_{u \in N[v]} g(u)\} = 1$, لاحظ الشكل (10-8, c).



الشكل (10-8, c)



الشكل (10-8, b)



الشكل (10-8, a)

مبرهنة (8-35) (Hye K. Lim): ليكن البيان $G(p, q)$، عندئذٍ

$$\gamma^{-}(G) \leq \gamma(G),$$
$$\gamma^{-}(G) \leq \gamma_s(G).$$

مبرهنة (8-36): ليكن البيان $G(p, q)$ حيث $\Delta(G) \leq 5$، عندئذٍ

$$0 \leq \gamma^{-}(G) \leq \gamma_s(G).$$

البرهان: نفــرض أن $\Delta(G) \leq 5$ و $g : V(G) \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ أصــغر دالـــة سيطرة ناقصة. ليكن

$$M = g^{-1}(-1) \quad و \quad P = g^{-1}(1) = \{v \in V(G) : g(v) = 1\}$$

واضح أنه إذا كان $M = \varnothing$، فإن $\gamma^{-}(G) = |P| \geq 1$، لنفرض أن $M \neq \varnothing$. وليكن k عدد الأضلاع من $E(G)$ والتي تقع على رأس من P ورأس من M. لأجل كل رأس $v \in M$ لدينا $g(N[v]) \geq 1$، كذلك $|N(v) \cap P| \geq 2$ و $k \geq 2|M|$. كذلك لأجل كل رأس $v \in P$ لدينا $g(N[v]) \geq 1$، كذلك $|N(v) \cap P| \geq |N(v) \cap M|$. الآن

$deg(v) \le 5$, ينتج من ذلك أن $|N(v) \cap M| \le 2$. عندئذٍ $2|P| \ge k \ge 2|M|$ ومنه ينتج

$$\gamma_s \ge \gamma^{-}(G) = |P| - |M| \ge 0.\square$$

مبرهنة (8-37) (Hye K. Lim): ليكن G بياناً ثنائي التجزئة من الرتبة p، عندئذٍ $4(\sqrt{p+1}-1)-p \le \gamma^{-}(G)$.

مبرهنة (8-38): ليكن البيان G(p, q) حيث $\Delta(G) \le 3$، عندئذٍ

$$\gamma_s(G) \ge p/3.$$

البرهان: لتكن $g : V(G) \to \{-1, 1\}$ دالة السيطرة المرمزة للبيان G مع $g(V(G)) = \gamma_s(G)$. ليكن P, M و k هي نفسها المعرفة في برهان المبرهنة (8-36). إذا كان $M = \varnothing$، عندئذٍ $\gamma_s(G) = p$. وإلا كما في برهان النظرية (8-36) يكون $k \ge 2|M|$. لدينا $\Delta(G) \le 3$، هذا يعني أنه لأجل كل رأس $v \in P$ يكون $|N(v) \cap M| \le 1$، لذلك $|P| \ge k \ge 2|M|$. لأن $|P| + |M| = p$ ينتج أن $|M| \le p/3$ و $|P| \ge 2p/3$. ومنه ينتج $\gamma_s(G) \ge 2p/3 - p/3 = p/3$.$\square$

مبرهنة (8-39) (R. Haas & Th.Wexler):

i) $\gamma_s(P_2 \times P_n) = n : n \equiv 0 (\text{mod } 2)$,
$\gamma_s(P_2 \times P_n) = n + 1 : n \equiv 1 (\text{mod } 2)$,

ii) $7n/5 - 8/5 \le \gamma_s(P_3 \times P_n) \le 7n/5 + 2 - 2(n \text{ mod } 5)/5\ n$,

مبرهنة (8-40) (R. Haas & Th.Wexler):

i) $\gamma_s(C_3 \times C_n) = n$,
ii) $\gamma_s(P_2 \times C_n) = n : n \equiv 0 (\text{mod } 4)$,
$\gamma_s(P_2 \times P_n) = n + 2 : n \equiv 2 (\text{mod } 4)$,
$\gamma_s(P_2 \times P_n) = n + 1 : n \equiv 1 (\text{mod } 2)$,
iii) $7n/5 \le \gamma_s(P_3 \times C_n) \le 7n/5 + 8/5$,
iv) $\gamma_s(C_3 \times P_n) = n + 2$.

ملاحظة (8-4): $\gamma_s(P_m \times P_n)$, $\gamma_s(C_m \times C_n)$, $\gamma_s(P_m \times C_n)$ و $\gamma_s(C_m \times P_n)$, عندما $m \ge 4$ غير معروفة ومازالت تنتظر الحل.

(8-6) السيطرة في البيان الموجه (Domination in Directed Graph).

كثير من الدراسات تناولت السيطرة في البيان غير الموجه. لكن في الفترة الأخيرة تم دراسة السيطرة في البيان الموجه مع العلم أن القليل من الأبحاث التي تعرضت لهذا الاتجاه. دراسة السيطرة في البيان الموجه أكثر صعوبة عنها في البيان غير الموجه بالإضافة إلى أنها أكثر تطبيقاً في الحياة العملية. بشكل عام أي دراسة على البيان الموجه يكون لها تطبيق في الحياة العملية أكثر من مثيلتها في البيان غير الموجه.

ليكن $D(V, A)$ بياناً موجهاً (directed graph) له مجموعة الرؤوس $V(D)$ ومجموعة الأقواس (arc sets) $A(D)$. نسمي المجموعة الجزئية S من مجموعة الرؤوس D, مجموعة سيطرة إذا كان لأجل كل رأس $v \in V(D) - S$ يوجد رأس $u \in S$ بحيث يكون $uv \in A(D)$ (أي أن uv قوس في $D(V, A)$).
عدد السيطرة, $\gamma(D)$, يكون عدد رؤوس أصغر مجموعة سيطرة في البيان D.

درجة كل رأس في البيان الموجه تنقسم إلى نوعين. الدرجة الخارجية وهي عدد الأقواس الخارجة من الرأس ونرمز لها $od(D)$, و $O(v)$ مجموعة الرؤوس الخارجية من v. الدرجة الداخلية وهي عدد الأقواس الداخلة إلى الرأس ونرمز لها $id(D)$, و $I(v)$ مجموعة الرؤوس الداخلة إلى v. نرمز لدرجة البيان العظمى الخارجية بـ $\Delta_+(D)$ ودرجة البيان العظمى الداخلية بـ $\Delta_-(D)$, كذلك درجة البيان الصغرى الخارجية $\delta_+(D)$ ودرجة البيان الصغرى الداخلية $\delta_-(D)$

نقول عن البيان الموجه $D(V, A)$ إنه دوري (أو دوري رياضي) (tournament), إذا كان لأجل أي رأسين $u, v \in V(D)$ أما $(u, v) \in A(D)$ أو $(v, u) \in A(D)$ وليس كلاهما معاً. بينما يكون $D(V, A)$ بياناً موجهاً متعدياً (transitive) بحيث إذا كان $(u, v) \in A(D)$ و $(v, w) \in A(D)$, عندئذٍ يكون $(u, w) \in A(D)$. ويكون $D(V, A)$ بياناً موجهاً متماثلاً (symmetric) إذا كان لأجل كل قوس $(u, v) \in A(D)$ عندئذٍ يكون $(v, u) \in A(D)$.

مبرهنة (8-41) (C. Lee): ليكن $D(p, q)$ بياناً موجهاً و δ^- أصغر درجة داخلية, عندئذٍ $1 \leq \gamma(D) \leq \dfrac{\delta^- + 1}{2\delta^- + 1} p$.

مبرهنة (8-42) (S. Merz & D. Stewart): ليكن $D(p, q)$ بياناً موجهاً, عندئذٍ $\gamma(D) + \Delta_+(D) \leq p$.

البرهان: لنختار الرأس v بحيث إن $od(v) = \Delta_+(D)$. لتكن S مجموعة سيطرة لـ $V(D) - O(v)$ تتضمن الرأس v. نعلم أن

$$S \subseteq V(D) - O(v).$$

ومنه نجد

$$|S| + od(v) = |S| + \Delta_+(D) \leq p.$$

بما أن S مجموعة سيطرة, يؤدي ذلك إلى

$$\gamma(D) + \Delta_+(D) \leq |S| + \Delta_+(D) \leq p. \square$$

مبرهنـــة (43-8) (Shaheen, 2009): ليكن $C_m \times C_n$ جداء حلقتـــين مـــوجهتين, عندئذٍ

i) $\gamma(C_n) = \lceil n/2 \rceil$,

ii) $\gamma(C_3 \times C_n) = n : \ n \equiv 0 (\text{mod } 3)$,
$\gamma(C_3 \times C_n) = n + 1 : n \equiv 1,2 (\text{mod } 3)$,

iii) $\gamma(C_4 \times C_n) = \lceil 3n/2 \rceil \ : \ n \equiv 0, 1, 3, 5, 7 \ (\text{mod } 8)$,
$\gamma(C_4 \times C_n) = \lceil 3n/2 \rceil + 1 \ : \ n \equiv 2, 4, 6 \ (\text{mod } 8)$,

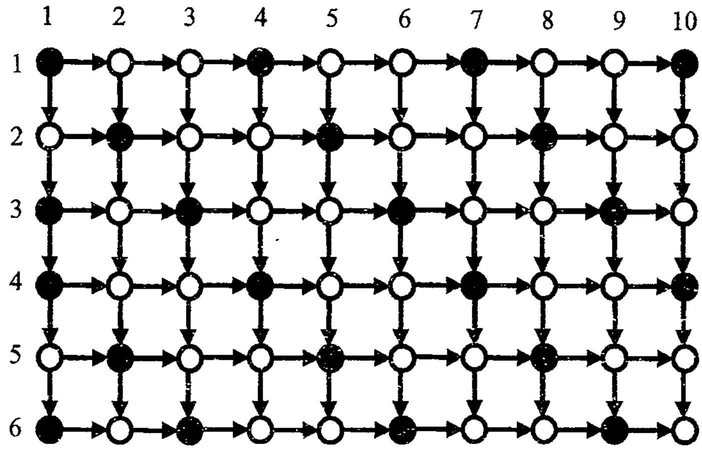
iv) $\gamma(C_5 \times C_n) = 2n$,

v) $\gamma(C_6 \times C_n) = 2n \ : \ n \equiv 0 \ (\text{mod } 3)$,
$\gamma(C_6 \times C_n) = 2n + 2 : \ n \equiv 1, 2 \ (\text{mod } 3)$.

ملاحظة (5-8): $\gamma(C_m \times C_n)$, عندما $7 \leq m$ غير معروفة ومازالت مطروحة للحل.

مثال (16-8). جد $\gamma(C_6 \times C_{10})$.

الحل: من المبرهنة (43-8, v) نجد أن $\gamma(C_6 \times C_{10}) = 22$, لاحظ الشكل (11-8).



الشكل (11-8)

ملاحظة (6-8): عند رسم البيان الموجه $C_6\times C_{10}$, هناك ضلع موجه من الرأس (i, 10) إلى الرأس (i, 1), لأجل $1 \le i \le 6$ وكذلك هناك ضلع موجه من الرأس (6, j) إلى الرأس (1, j), لأجل $1\le j \le 10$. ولم نرسمهما منعاً للالتباس في الرسم.

تمارين 8:

1. جد مجموعة وعدد السيطرة لتمركز وزراء على رقعة الشطرنج من القياس 8×8 (إيجاد مواقع أو مراكز السيطرة) في الحالات التالية:
   a. لايوجد وزيران يقتلان بعضهما.
   b. كل الوزراء تكون على قطر واحد.
   c. كل الوزراء تكون على عمود واحد.
2. جد تمركز 8 وزراء على رقعة الشطرنج من القياس 8×8, بحيث لايقتل أحدهما الآخر.
3. جد مايلي:
   a. $\gamma(Q_4)$.
   b. $i(Q_4)$.
   c. $\gamma_t(Q_4)$.
   d. $\gamma_c(Q_4)$.
4. جد مايلي:
   a. $\gamma_2(G)$, $\gamma_{\leq 2}(G)$, $\gamma_g(G)$ حيث G بيان بيترسن.
   b. $\gamma_2(P_n)$, $\gamma_2(C_n)$.
   c. $\gamma_{\leq 2}(P_n)$, $\gamma_{\leq 2}(C_n)$.
   d. $\gamma_2(P_2\times P_n)$, $\gamma_2(C_3\times C_n)$.
   e. $\gamma_g(P_3\times P_n)$, $\gamma_g(C_3\times C_n)$.
5. أوجد مايلي:

a. $\gamma_t(P_3\times P_6), \gamma(P_3\times P_6)$.

b. $i(P_7\times P_7), \gamma(P_7\times P_7)$.

c. $\gamma_t(C_5\times C_9), \gamma(C_5\times C_9)$.

d. $i(C_8\times C_8), \gamma(C_8\times C_8)$.

e. $\gamma_t(K_{6,7}), \gamma(K_{6,7})$.

f. $\gamma_t(P_2\times K_{1,5}), \gamma(P_2\times K_{1,5})$.

6. جد مايلي:

a. $do(G)$, حيث G بيان بيترسن.

b. $do(K_{3,5})$.

c. $do(Q_3)$.

d. $do(C_3\times P_4)$.

7. جد مايلي:

a. $do_t(G)$, $do_c(G)$ حيث G بيان بيترسن.

b. $do_t(K_{4,4})$, $do_c(K_{4,4})$.

c. $do_t(Q_3)$, $do_c(Q_3)$.

d. $do_t(P\times P_4)$, $do_c(P_4\times P_4)$.

8. أثبت النتيجة (8-1).

9. أثبت المبرهنة (8-6).

10. جد مجموعة السيطرة و عدد السيطرة لبيان بيترسن وذلك باستخدام الخوارزمية (8-1).

11. باستخدام الخوارزمية (8-1), جد مجموعة السيطرة و عدد السيطرة للبيان الموضح في الشكل (8-7).

12. استنتج عدد السيطرة لأي بيان تام وذلك حسب الخوارزمية (8-1).

13. برهن أنه لاتوجد مجموعة جزئية $S \subseteq V(Q_4)$ من رؤوس البيان Q_4 بحيث يكون $|S \cap N[v]| = 1$ مهما يكن الرأس v من Q_4.

14. برهن أنه إذا كان البيان G غير مترابط, عندئذٍ $\gamma(\overline{G}) \leq 2$.

15. برهن أنه إذا كان $diam(G) = 2$, فإن $\gamma(G) \leq \delta(G)$.

16. ماهو أكبر عدد من الأضلاع في بيان عدد رؤوسه 10, بحيث يكون $\gamma(G) = 3$.

17. جد بيان G عدد رؤوسه 7 وعدد أضلاعه 10 و $\Delta(G) = 3$, بحيث يكون $\gamma(G) = 3$.

18. برهن المبرهنة (8-19).

19. أثبت أن $\gamma(C_2 \times P_n) = \lceil (n+1)/2 \rceil$.

20. عرف مجموعة من البيانات G والتي تحقق $\gamma_c(G) = diam(G) - 1$.

21. عرف مجموعة من البيانات G والتي تحقق $\gamma_c(G) = 2\beta_1(G)$.

22. ارسم بيان G بحيث يكون $\gamma(G) = 10$ و $\gamma_t(G) = 15$.

23. عرف مجموعة من البيانات $G(p, q)$ والتي تحقق $\gamma_t(G) = p - \Delta(G)$.

24. أثبت أن $do(\overline{P_n}) \leq \lfloor n/2 \rfloor + 2$.

25. جد مايلي:

a. $\gamma^{-}(Q_4), \gamma_s(Q_4)$.

b. $\gamma^{-}(K_5), \gamma_s(K_5)$.

c. $\gamma^{-}(K_{3,3}), \gamma_s(K_{3,3})$.

26. ليكن $G(p, q)$ بياناً منتظماً من الدرجة 3. أثبت أن $\gamma_s(G) \leq n/2$.

27. جد عدد السيطرة للبيان الموجه $D_1 \times D_2$ ووضح ذلك بالرسم في الحالات التالية:

a. $\gamma(P_4 \times P_9)$.

b. $\gamma(C_5 \times C_8)$.

c. $\gamma(P_2 \times P_2 \times P_2)$.

28. جد عدد السيطرة للبيان الموجه $D(V, A)$ ووضح ذلك بالرسم في الحالات التالية:

a. D بيان دوري بين 4 لاعبين (كل الحالات).

b. D بيان متعدي للحالات في (a).

c. D بيان متماثل للحالات في (a).

الفصـــل التـــاســـع

أعـــداد رامـــزي

Ramsey Numbers

توفي العالم البريطاني فرانك رامزي (Frank Ramsey) عام 1930 عن عمر 26 عام, بعد أن قدم نظريته والتي أطلق عليها فيما بعد, نظرية رامزي (Ramsey Theory). هذه النظرية أصبحت الشغل الشاغل لكثير من العلماء في الرياضيات والتي كانت بدايتها بفكرة بسيطة, أنه من بين كل ستة أشخاص, هناك ثلاثة يعرفون بعضهم بالتبادل أو لايعرفون بعضهم بتاتاً. بمعنى أخر رياضياً وبيانياً بشكل خاص, من أجل كل بيان بسيط G مكون من 6 رؤوس أما $K_3 \subseteq G$ أو $\overline{K_3} \subseteq G$. هذه القاعدة فتحت الباب لدراسة مايطلق عليه الآن بأعداد رامزي.

بالطبع تحديد عدد رامزي يزداد صعوبة أكبر بكثير مما يتخيل الفرد مقارنةً مع الفكرة البسيطة التي أنطلق منها. هذا يتيح لنا التعمق في مجال إبداع هذه النظرية والاطلاع على بعض النتائج. في عام 1935, العالمان المجريان ايردس و سيكيرس (Erdös & Szekeres), لفتا الانتباه إلى نظرية رامزي و برهنا أن عدد رامزي R(s, t) موجود دائماً وقدموا حداً أعلى له. كما أثبتوا أن إيجاد عدد رامزي هو من التعقيد NP-complete.

تقسم تطبيقات أعداد رامزي إلى قسمين, عملي ورياضي. في الجانب العملي تساعد المهندسين في بناء شبكات الاتصالات (شبكات الكمبيوتر والانترنت) لنقل المعلومات واسترجاع إشارات النظام. في مجال الرياضيات, هناك تطبيقات لأعداد رامزي في الجبر والهندسة.

(1-9) خصائص أعداد رامزي (Properties of Ramsey Numbers).

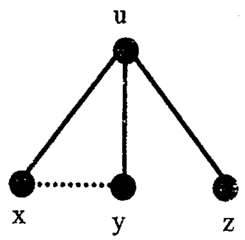
تعريف (1-9): يُعرف عدد رامزي (Ramsey number) بالشكل التالي:
لأجل s, t أعداد صحيحة موجبة, عدد رامزي $R(s, t)$ يكون أقل عدد صحيح موجب p, بحيث إن كل بيان بسيط G من المرتبة p يحتوي K_s أو $\overline{K_t}$ ونقول عندئذٍ $R(s, t) = p$ (أي عدد رامزي لأجل s و t يكون p). بمعنى أخر أما $K_s \subseteq G$ أو $K_t \subseteq \overline{G}$. أو يمكن أن نعرف عدد رامزي $R(s, t)$ بأنه أقل عدد p بحيث إن أي بيان من المرتبة p يحتوي البيان K_s كبيان جزئي أو يحتوي t رأس مستقل.

نرمز بـ $\rho(u, G)$ لدرجة الرأس u في البيان G, و $N(u, G)$ لمجموعة مجاورات الرأس u في البيان G.

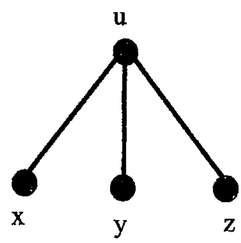
مبرهنة (1-9): أي بيان بسيط من المرتبة 6, إما أن يحتوي K_3 كبيان جزئي أو يحتوي $\overline{K_3}$ كبيان جزئي. هذا يكافئ القول إما أن البيان G يحتوي K_3 كبيان جزئي أو $\overline{G}$ يحتوي البيان K_3 كبيان جزئي.

البرهان: ليكن $u\in V(G)$. بما أن $\rho(u, G) + \rho(u, \overline{G}) = 5$, فإنه إما $\rho(u, G) \geq 3$ أو $\rho(u, \overline{G}) \geq 3$. بدون التقليل من عمومية المسألة, نعتبر أن $\rho(u, G) \geq 3$, (بسبب تماثل حالة المبرهنة بالنسبة لـِ G و $\overline{G}$). ليكن x, y, z ثلاثة رؤوس مجاورة للرأس u في G, لاحظ الشكل (1, 9).

إذا كان هناك على الأقل رأسان متجاوران من الرؤوس x, y, z (ليكن x, y). عندئذٍ الرؤوس x, y مع الرأس u تشكل بياناً K_3 جزئياً من البيان G, لاحظ الشكل (1-9, a). وإلا لايوجد رأسين متجاورين من x, y, z. منه نستنتج أن K_3 بيان جزئي من $\overline{G}$, لاحظ الشكل (1-9, a).□



(1-9, a) الشكل



(1-9, b) الشكل

مبرهنة (2-9): مهما يكن $1 \leq s, t$, فأن $R(s, t) = R(t, s)$.

البرهان: واضح من التعريف البديل لعدد رامزي, يمكننا التبديل بين دوري s و t.

مبرهنة (3-9): مهما يكن $1 \leq s$, فأن $R(s, 1) = 1$.

البرهان: لأن المتمم لأي بيان غير تافه يحتوي البيان K_1 كبيان جزئي.□

مبرهنة (9-4): مهما يكن $1 \leq s$, فأن $R(s, 2) = s$.

البرهان: إذا كان البيان البسيط G من المرتبة s, غير تام, عندئذٍ متممه $\overline{G}$ يحتوي K_2 كبيان جزئي, ومنه نستنتج أن $R(s, t) \leq s$. واضح أن الاتجاه المعاكس للمتراجحه صحيح, لأن البيان K_{s-1} لايمكن أن يحتوي البيان K_s كبيان جزئي. وكما نعلم أن $\overline{K_{s-1}}$ لايحتوي أي ضلع.□

مبرهنة (9-5) (Erdös & Szekeres):

a) مهما يكن $3 \leq s, t$, فأن $R(s, t) \leq R(s -1, t) + R(s, t -1)$.

b) إذا كان $R(s -1, t)$ و $R(s, t -1)$ عددان زوجيان, عندئذٍ

$$R(s, t) < R(s -1, t) + R(s, t -1).$$

البرهان: (a). تعميماً لبرهان المبرهنة (9-1). ليكن G بياناً بسيطاً من المرتبة $R(s -1, t) + R(s, t -1)$, وليكن $u \in V(G)$.

نعلم أن $\rho(u, G) + \rho(u, \overline{G}) = R(s -1, t) + R(s, t -1) -1$, عندئذٍ $\rho(u, G) \geq R(s -1, t)$ أو $\rho(u, \overline{G}) \geq R(s, t -1) = R(t -1, s)$. إذا كان $\rho(u, G) \geq R(s -1, t)$, عندئذٍ البيان الجزئي H المكون من مجموعة مجاورات u في البيان G, له على الأقل $R(s-1, t)$ رأس, أي $N(u, G) = H$.

إما H يحتوي K_{s-1} كبيان جزئي, والذي مع الرأس u يشكل K_s كبيان جزئي في G أو $\overline{H}$ يحتوي K_t كبيان جزئي (وبالتالي $\overline{G}$ يحتوي K_t كبيان جزئي). إذا كان $\rho(u, \overline{G}) \geq R(t -1, s)$, عندئذٍ المطلوب ينتج بتطبيق نفس المناقشة السابقة بالنسبة للبيان $\overline{G}$ وذلك بتبديل s و t.

(b). لنفرض أن $R(s-1, t)$ و $R(s, t-1)$ عددان زوجيان, وأن G, له $R(s-1, t) + R(s, t-1) - 1$ رأس. عندئذٍ

$$\rho(u, G) + \rho(u, \overline{G}) = R(s-1, t) + R(s, t-1) - 2.$$

لأن $|V(G)|$ عدد فردي, عندئذٍ هناك رأس $u \in V(G)$ درجته زوجية. إذا كان $\rho(u, G) \geq R(s-1, t)$, عندئذٍ ينتج المطلوب بنفس العمل في (a). إذا كان $\rho(u, G) < R(s-1, t)$, عندئذٍ $\rho(u, G) \leq R(s-1, t) - 2$ (لأن $\rho(u, G)$ عدد زوجي). إذاً, $\rho(u, \overline{G}) \geq R(t-1, s)$, والمطلوب مرة ثانية يكون كما في (a).□

نتيجة (1-9) (Erdös & Szekeres): لأجل كل عددين صحيحين موجبين s و t, يكون $R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$.

البرهان: بالاستقراء على المجموع s + t. النتيجة صحيحة عندما s + t = 2, وذلك حسب المبرهنة (2-9). نعتبر أنه عندما $3 \leq k$, المتراجحة تكون صحيحة من أجل كل الأعداد الصحيحة s و t والتي مجموعها يكون أقل من k, ولنفرض أن s + t = k. عندئذٍ من المبرهنة ((a) ,5-9) يكون

$$R(s, t) \leq R(s-1, t) + R(s, t-1)$$

ومن جهة أخرى بحسب الاستقراء

$$\begin{aligned} R(s, t) &\leq R(s-1, t) + R(s, t-1) \\ &\leq \binom{(s-1)+t-2}{(s-1)-1} + \binom{s+(t-1)-2}{s-1} \end{aligned}$$

$$= \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} = \binom{s+t-2}{s-1}.\square$$

(2-9) حساب أعداد رامزي (Ramsey Number Calculations).

إن عملية إيجاد أعداد رامزي $R(s, t)$, حيث $3 \leq s \leq t$, معقدة جداً باستثناء بعض الحالات القليلة وذلك عندما تكون s, t صغيرة. والحالات المعروفة هي عندما يكون $s = 3$ و $3 \leq t \leq 9$, كذلك بعض الحالات عندما $s = 4$ و $3 \leq t \leq 9$. وهذه دلالة على تعقيد هذه المسألة على الرغم من قدمها. الجدول (9-1) يوضح هذه القيم.

	t = 3	4	5	6	7	8	9
s = 3	6	9	14	18	23	28	36
s = 4	9	18	25				

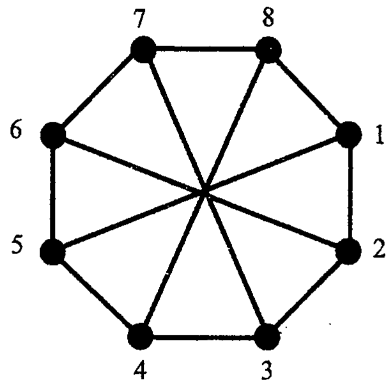
جدول (9-1)

مبرهنة (9-6): $R(3, 4) = 9$.

البرهان: من المبرهنة (9-1) لدينا $R(3, 3) = 6$ ومن المبرهنة (9 ,4) لدينا $R(4, 2) = 4$. من المبرهنة ((b) ,9 -5) ينتج الحد الأعلى

$$R(3, 4) \leq R(2, 4) + R(3, 3) - 1 = 9.$$

لإثبات أن $R(3, 4) = 9$, نلاحظ البيان في الشكل (9 ,2).



الشكل (9-2)

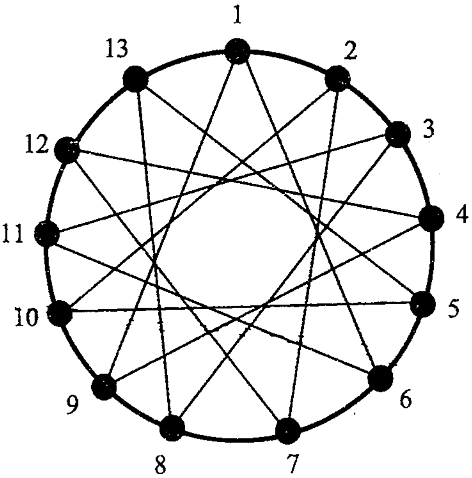
هذا البيان من المرتبة 8 وواضح أنه يحتوي أكبر عدد من الأضلاع بحيث لايحتوي K_3 أو $\overline{K_4}$ وأن إضافة أي ضلع يفقده هذه الخاصية ومنه ينتج $8 <$ R(3, 4). أخيراً نستنتج أن R(3, 4) = 9.□

مبرهنة (9-7): R(3, 5) = 14.

البرهان: من المبرهنات ((a) ,9 -5), (9-4) و (9-6) ينتج

$$R(3, 5) \leq R(2, 5) + R(3, 4) = 5 + 9 = 14.$$

لإثبات عكس المتراجحة, نلاحظ البيان في الشكل (9 ,3). هذا لبيان من المرتبة 13, له أكبر عدد من الأضلاع بحيث لايحتوي K_3 أو $\overline{K_5}$ وأن إضافة أي ضلع يفقده هذه الخاصية وهذا يؤدي إلى أن $13 <$ R(3, 5). ومنه يكون R(3, 5) = 14.□



الشكل (9-3)

تعريف (9-2): لأجل أي بيانين بسيطين H_1, H_2, عدد رامزي $R(H_1, H_2)$, يكون أقل عدد p بحيث أن كل بيان بسيط من المرتبة p, إما يحتوي H_1 كبيان جزئي أو $\overline{G}$ يحتوي H_2 كبيان جزئي.

مبرهنة (9-8): لأي بيانين بسيطين H_1, H_2, عدد رامزي $R(H_1, H_2)$ موجود.

البرهان: ليكن H_1, H_2 بيانين بسيطين حيث $|H_1| = s, |H_2| = t$. بما أن $H_1 \subseteq K_s$ و $H_2 \subseteq K_t$, عندئذٍ يكون $R(H_1, H_2) \leq R(s, t)$.□

نقبل المبرهنات التالية بدون برهان.

مبرهنة (9-9) (Chartrand and Lesniak, 1986):

$$R(K_{1,s}, K_{1,t}) = \begin{cases} s+t : s \neq 0 (\text{mod } 2) \text{ or } t \neq 0 (\text{mod } 2), \\ s+t-1 : s, t \equiv 0 (\text{mod } 2). \end{cases}$$

مبرهنة (10-9) (Reinhard Diestel, 2005): لتكن T شجرة من المرتبة p, وليكن G بياناً بسيطاً بحيث إن $\delta(G) \geq p-1$. عندئذٍ تكون T بياناً جزئياً من G.

مبرهنة (11-9) (Marek Kubale, 2004): ليكن G بيان k-لوني حرج, عندئذٍ $\delta(G) \geq k-1$.

مبرهنة (12-9) (Chvátal, 1977): لتكن T_s شجرة من المرتبة s, عندئذٍ $R(T_s, K_t) = (s-1)(t-1)+1$.

البرهان: العلاقة واضحة عندما $s = t = 1$. لنفرض أن $2 \leq s, t$. لإثبات الحد الأدنى, نلاحظ أن البيان $H = (t-1) K_{s-1}$ لايحتوي T_s كبيان جزئي, لأن كل مركبة من H مؤلفة من $s-1$ رأساً. كذلك, بما أن هناك فقط $t-1$ مركبة بيان تام K_{s-1} في H, فواضح أن H لايحتوي $\overline{K_t}$. هذا يؤدي إلى أن

$$R(T_s, K_t) \geq (s-1)(t-1)+1.$$

لإثبات الحد الأعلى, ليكن G أي بيان من المرتبة $(s-1)(t-1)+1$. سوف نبرهن أن G يحتوي T_s أو $\overline{K_t}$. إذا كان $\overline{K_t}$ ليس بياناً جزئياً من G, عندئذٍ

$\beta_0(G) \le t - 1$. من جهة أخرى, بما أن G من المرتبة $(s-1)(t-1)+1$ و $\beta_0(G) \le t - 1$, ينتج من ذلك

$$\chi(G) \geq \left\lceil \frac{(s-1)(t-1)+1}{\beta_0(G)} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{(s-1)(t-1)+1}{t-1} \right\rceil = s .$$

ليكن G_1 بيان بيان s–لوني حرج في G. من المبرهنة (9-11), نجد أن $\delta(G_1) \ge s - 1$. لكن من المبرهنة (9-10), ينتج لدينا T_s تكون بياناً جزئياً من G_1 وبنفس الوقت من G, وهو المطلوب.□

نقبل المبرهنات التالية بدون برهان.

مبرهنة (9-13): (Chartrand and Lesniak, 1986) لأجل أي عدد صحيح $3 \le n$, يكون $R(n, n) > \lfloor 2^{n/2} \rfloor$.

مبرهنة (9-14) (Ronald Gould, 1988):

1) لأجل أي بيان من المرتبة t ولايحتوي رأساً معزولاً, يكون

$$R(P_3, G) = \begin{cases} t+1 : \overline{G} \ \ has \ \ 1-factor, \\ t \ : \ otherwise, \end{cases}$$

2) مهما يكن $2 \le s \le t$, عندئذٍ $R(P_s, P_t) = t + \lfloor s/2 \rfloor - 1,$

مبرهنة (9-15) (Ronald Gould, 1988):

1) مهما يكن $3 \le s \le t$, عندئذٍ

$R(C_s, C_t) = 2t - 1 \ : t \equiv 1 (\bmod 2) \ \& \ (C_3, C_3) \neq (3, 3),$

$R(C_s, C_t) = t + s/2 - 1 \ : \ s, t \equiv 0 (\bmod 2) \ \& \ (s, t) \neq (4, 4),$

$R(C_s, C_t) = \max(t + s/2 - 1, 2s - 1) : t \equiv 1 (\bmod 2) \ \& \ s \equiv 0 (\bmod 2)$

$R(C_3, C_3) = R(C_4, C_4) = 6.$

$$R(C_s, K_{1,t}) = \begin{cases} 2t + 1 : s \equiv 1 (\bmod 2) \ \& \ s \leq 2t + 1, \\ s \ : \ s \geq 2t. \end{cases} \qquad (2$$

(3-9) تلوين رامزي (Ramsey Coloring).

مضى ايردس (Erdös) إلى الأمام في أفكاره وقدم توظيفاً أخر لنظرية رامزي بطرحه نظرية رامزي بطريق أخرى اعتماداً على تلوين الأضلاع, وذلك بالشكل التالي:

ماهو أصغر عدد صحيح موجب p, بحيث إذا لونا بطريقة اختيارية أضلاع البيان K_p بلونين وليكونا الأحمر والأخضر, إما يحتوي البيان K_s ولأضلاعه اللون الأحمر أو البيان K_t ولأضلاعه اللون الأخضر. هذا التعريف بموضوع التلوين اعتماداً على نظرية رامزي, أطلق عليه لوني عدد رامزي (two–color Ramsey number).

نعرف k–لون (k-coloring) للأضلاع بأنه الدالة f المعرفة من مجموعة أضلاع البيان G إلى المجموعة $\{1, 2, \ldots, k\}$ والتي تمثل k من الألوان المختلفة, بالشكل التالي: $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$, أي تلوين الأضلاع باستخدام k لون. عندئذٍ يمكن تعميم نظرية رامزي من أجل k لون على النحو,

ماهو أقل عدد صحيح موجب p بحيث يحتوي البيان K_p على البيانات $G_1, G_2, \ldots, G_k$ كبيانات جزئية ولأضلاع كل بيان منها G_i اللون i حيث $(i = 1, 2, \ldots, k)$. ونرمز لذلك $(G_1, G_2, \ldots, G_k : p)$–لون $((G_1, G_2, \ldots, G_k : p)\text{-coloring})$, وهو تعريف يكافئ نفس المعنى لتعريف أعداد رامزي $R(G_1, G_2, \ldots, G_k : p)$.

هنا سوف نتعامل مع 2–لون (2-coloring). ليكن لدينا البيانان G_1, G_2, نقول عن التلوين f, إنه $(G_1, G_2 : p)$–لون, $((G_1, G_2 : p)\text{-coloring})$, إذا وفقط إذا كان f, 2–لون للبيان K_p و f يحتوي G_1 كبيان جزئي لُوّنت أضلاعه باللون 1 أو يحتوي G_2 كبيان جزئي أضلاعه ملونه باللون 2.

إذا كان $G_1 = K_r$ و $G_2 = K_s$, عندئذٍ نعبر عن ذلك بالشكل $(r, s : p)$–لون $(r, s : p)\text{-coloring}$, (أي $(K_r, K_s : p)$–لون) وهو يساوي $R(s, t)$.

مثال (9-1): أثبت أن $(3, 4 : p) = 9$–لون أو $(R(3, 4) = 9)$.

الحل: ليكن البيان K_8, نرقم الرؤوس بمجموعة الأعداد $\{0, 1, 2, \ldots, 7\}$ ونلون الضلع بين الرأسين i, j بالشكل التالي:

إذا كان $j - i \equiv 1, 4, 7 \pmod 8$, عندئذٍ نعطي الضلع (i, j) اللون الأحمر والأضلاع الباقية نعطيها اللون الأخضر (الأضلاع الغامقة لها اللون الأحمر و الأضلاع المتقطعة لها اللون الأخضر) لاحظ الشكل (9-4). أي أن K_8 لايحتوي البيان K_3 بحيث أضلاعه ملونه بالأحمر ولا يحتوي البيان K_4 بحيث أضلاعه ملونه بالأخضر. أي أن $(K_3, K_4 : P)$–لون > 8, ومنه

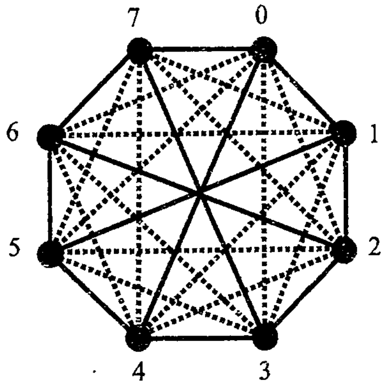
لون-$(3, 4 : p) = R(3, 4) > 8$.

نعلم أن $R(3, 3) = 6$ و $R(2, 4) = 4$. من المبرهنة (b : 5-9) لدينا

$$R(3, 4) < (3, 3) + R(2, 4) = 6 + 4 = 10$$

ومنه ينتج

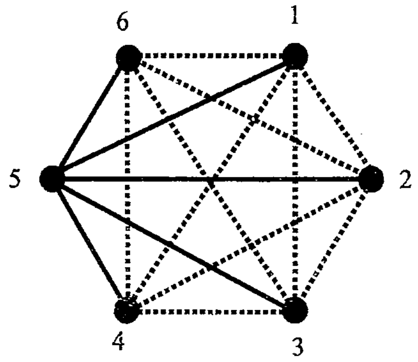
لون-$(3, 4 : p) = R(3, 4) = 9$. □



الشكل (4-9)

مثال (2-9): أثبت أن لون-$(P_4, C_6 : p) > 6$.

الحل: نلاحظ الشكل (5-9) لتجزئة أضلاع البيان K_6 (الأضلاع الغامقة لها اللون الأحمر و الأضلاع المتقطة لها اللون الأخضر). أي أن K_6 لايحتوي P_4 ملون بالأحمر ولا C_6 ملون بالأخضر. أي أن لون-$(P_4, C_6 : P) > 6$. □



الشكل (5-9)

مبرهنة (16-9): $R(4, 4) = 18$.

البرهان: لنثبت أولاً أن $R(4, 4) > 17$ وذلك بطريقة بناء $(4, 4 : 17)$-لون. لتكن رؤوس البيان K_{17} مرمزة بالأرقام التالية $\{0, 1, 2, \ldots, 16\}$ ونعطي اللون الأحمر للضلع (i, j)، إذا كان $|i - j| \equiv 1, 2, 4, 8 \pmod{17}$ ونعطي اللون الأخضر لباقي الأضلاع. يمكن التأكد أن K_{17} لايحتوي البيان K_4 كبيان جزئي بأضلاع حمراء أو خضراء ومنه ينتج أن $R(4, 4) > 17$. نعلم أن $R(3, 4) = 9$. من المبرهنة $(a : 9\text{-}5)$ لدينا

$$R(4, 4) \leq R(3, 4) + R(4, 3) = 9 + 9 = 18.$$

ومنه نجد

$$\text{لون-}(4, 4 : p) = R(4, 4) = 18.\square$$

بيان العجلة W_t، وهي بيان ينتج بإضافة رأس إلى منتصف لحلقة C_{t-1} ومن ثم إضافة ضلع من هذا الرأس إلى كل رأس في الحلقة. بيان النجمة S_s، هو بيان ثنائي التجزئة تام $K_{1, s-1}$.

نقبل المبرهنات التالية بدون برهان.

مبرهنة (9-17) (Marek Kubale, 2004): لأجل $3 \leq s$ يكون

$$R(S_s, W_5) = 3s - 2.$$

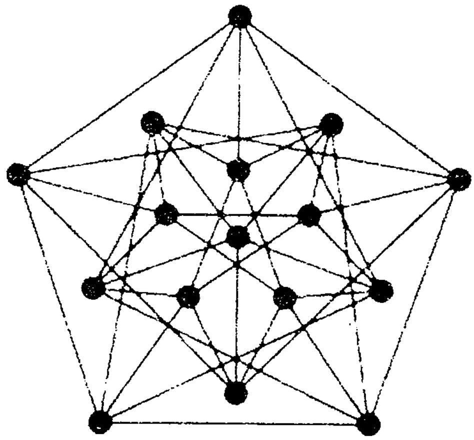
مبرهنة (9-18) (Marek Kubale, 2004): لأجل $2t - 4 \leq s$ و t عدد موجب فردي بحيث $5 \leq t$, يكون $R(S_s, W_t) = 3s - 2$.

المثال التالي يوضح تلوين رامز المتعدد $R(K_3, K_3, K_3 : p)$.

مثال (9-3): أثبت أن $(K_3, K_3, K_3 : p) = 17$-لون, أي $R(3, 3, 3) = 17$.

الحل: نفرض لدينا تلويناً لأضلاع بيان تام باستخدام 3 ألوان (أحمر, أصفر, أخضر). ولنفرض أيضاً أن هذا التلوين لايحتوي K_3 كبيان جزئي لأضلاعه لون واحد. لنختار الرأس v. ولندرس الرؤوس التي تجاور v بأضلاع خضراء والتي نسميها المجاورات الخضراء للرأس v. المجاورات الخضراء للرأس v, لايمكن أن تحتوي رأسين متجاورين بضلع أخضر لأن ذلك يناقض الفرض. نستنتج أن الرؤوس المجاورة للرأس v تتصل فيما بينها بأضلاع صفراء وحمراء فقط. بما أن $R(3, 3) = 6$, عندئذٍ المجاورات الخضراء للرأس v, تكون 5 رؤوس علىالأكثر (لو كانت 6 رؤوس لكانت احتوت K_3, لأن K_6 يحتوي K_3 بلون واحد لأضلاعه). كذلك بنفس الأسلوب المجاورات الصفراء والحمراء تحوي 5 رؤوس على الأكثر في كل منها. بما أن كل رأس باستثناء v, يكون مجاوراً أخضر أو أصفر أو أحمر للرأس v, عندئذٍ البيان التام المفروض له على الأكثر

$16 = 5 + 5 + 5 + 1$ رأس. ومنه نستنتج أن $R(3, 3, 3) \leq 17$, (لأن زيادة أي رأس يحقق المطلوب), لاحظ الشكل (6-9).□



الشكل (6-9)

لإثبات أن $R(3, 3, 3) \geq 17$, يكفي رسم أضلاع ملونة للبيان K_{16} باستخدام 3 ألوان ونتأكد أن التلوين لايحتوي K_3 وحيد اللون بثلاث نسخ (أحمر, أصفر, أخضر), لاحظ الشكل (7-9).□

تمـــــــارين 9:

1. جد الحد الأعلى لـِ $R(3, 6)$.

2. أثبت أن $R(3, 6) \geq 17$.

3. استخدم التمرين (1), لإيجاد الحد الأعلى لـِ $R(3, 7)$.

4. أثبت أن $R(3, 7) \geq 21$.

5. جد الحد الأعلى لـِ $R(4, 5)$.

6. جد الحد الأعلى لـِ $R(2, 2, 2)$.

7. أثبت أن $R(P_4, P_4) = 5$.

8. أثبت أن $R(P_4, K_4 - e) = 7$.

9. أثبت أن $R(P_5, K_{1,3}) = 5$.

10. أثبت أن $R(3, p) \leq (p^2 + p)/2$ وذلك باستخدام النتيجة (9-1).

11. أثبت أن $R(3, p) \leq (p^2 + 4)/2$, عنما يكون $3 \leq p$, وذلك باستخدام المبرهنة (9-5).

12. أثبت أن $R(3, p) \leq (p^2 + 3)/2$, عندما يكون $3 \leq p$, عدداً صحيحاً موجباً وفردياً, وذلك باستخدام التمرين (11).

الفصـــل الـــعـــاشـــر

شـــبكات التـــدفـــق وتطـــبيقاتـــها

Network Flows And Application

التدفق في الشبكات يعني كمية النفط أو الماء المتدفقة خلال شبكة من الأنابيب, عدد المركبات المتدفقة عبر شوارع مدينة ما ولاسيما في لحظات الذروة, مرور التيار الكهربائي من نقطة إلى أخرى, الضغط الذي يحدث أثناء ذروة الاتصالات السلكية أو اللاسلكية وحتي البريد الالكتروني. كل هذه الأشياء ومثيلاتها هي عبارة عن تدفق من مكان أول يسمى منبع s أو مصدر (source) إلى مكان ثاني يسمى مركز استلام ويدعى المصب t (sink or target). بالنسبة لتدفق النفط عبر شبكة أنابيب هناك مصدر s, ومصب t وشبكة من الأنابيب التي يتم تدفق النفط من خلالها.

في كل هذه المشاكل هناك حد أعلى لقدرة تمرير الخدمة في الشبكة ولاسيما بين نقطتي عبور وهذا مايطلق عليه قدرة الاستيعاب للشبكة أو اختصاراً السعة وتكون الغاية من الدراسة هي تحسين التدفق حتي يساوي (أو يكون قريباً قدر الإمكان من) السعة الحقيقة عبر توصيلات الشبكة. يجب ملاحظة أنه ليس بالضرورة أن تكون جميع توصيلات الشبكة متساوية السعة. علاوةً على ذلك, من أجل تقليل احتمالات

أن يكون هناك ضياع في التدفق يجب المحاولة عدة مرات لتحسين التدفق حتى الوصول للتدفق الأمثل.

الشبكة N(V, A, s, t, cap) مكونة من خمس عناصر, حيث D(V, A) يكون بياناً موجهاً مع مجموعتي رؤوس متمايزة, من بينها رأسين s و t يطلق عليها المصدر والمصب على الترتيب (يمكن أن تحتوي الشبكة أكثر من مصدر وأكثر من مصب). كل قوس e في الشبكة N مرفق بعدد حقيقي موجب cap(e), هو سعة (capacity) القوس e, وإذا كان هناك عددان مرفقان بالقوس فإن اليساري يدل على سعة القوس واليميني يدل على كمية التدفق خلال هذا القوس والذي بدوره يمثل أنبوب. كل من السعة والتدفق يشكل داله من مجموعة الأعداد الحقيقة الموجبة إلى أقواس الشبكة N. هنا نرمز للدرجة الداخلية والدرجة الخارجية للرأس v بـ id(v) و od(v) على الترتيب. سنرمز N(s, t), اختصاراً للشبكة N(V, A, s, t, cap).

التدفق f في الشبكة N يكون الدالة المعرفة من مجموعة الأقواس A إلى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة بحيث إن

1. $f(e) \le cap(e)$ وذلك مهما يكن $e \in A$.
2. لأجل أي رأس v بحيث $v \notin s$ و $v \notin t$ يكون

$$\sum_{e \in id(v)} f(e) - \sum_{e \in od(v)} f(e) = 0$$

يتضح أن التدفق هو تطبيق يصف عملية نقل أو جريان المواد أو السوائل خلال أنابيب الشبكة, بينما السعة فهي تطبيق يصف أكبر كمية يمكن نقلها عبر هذه الأنابيب. بالطبع أن التدفق لايمكن أن يتجاوز السعة. كذلك يضمن أن الكمية المتدفقة إلى الرأس v (حيث v, ليس من رؤوس المصدر والمصب) هي الكمية المتدفقة منه.

يمكن أن نحدد المصدر s والمصب t بشكل اختياري داخل البيان الموجه وبحيث id(s) و od(s) ليست خالية. كما أن اللفات لاتضيف أي فائدة للشبكة لأن الجريان خلالها يتدفق من الرأس ويعود لنفس الرأس, وبالتالي يمكن أن نفرض أن الشبكة لاتحوي لفات. كذلك الأقواس المتوازية (المضاعفة) لاتضيف أي شيء لدراسة الشبكات لأن دراسة التدفق والسعات عليها يمكن أن ندرسها مجتمعة على قوس واحد, ولذلك يمكن الاستغناء عنها. من كل ماسبق يمكن أن نفرض أن $|A| \leq |V| (|V| - 1)$.

ليكن لدينا شبكة N مع تدفق f, ومجموع التدفق على الشبكة يكون F والذي يطلق عليه كمية (أو قيمة) التدفق على الشبكة N. مشكلة دراسة التدفق هي معرفة أكبر كمية من F تصل إلى المصب t, بمعنى أخر هو دراسة تقليل الكمية الضائعة خلال عملية الجريان عبر أنابيب الشبكة من المصدر إلى المصب. حيث من الواضح أنه لاتصل كامل الكمية F إلى t, وإلا لم تكن هناك مشكلة للدراسة. وهذا مايسمى التدفق الأعظمي (maximum flow).

فورد و فولكيرسون (Ford & Fulkerson) 1962, هما أول من درسا التدفق الأعظمي. كذلك أوجدا عدداً من النتائج وطورا خوارزمية لإيجاد التدفق

الأعظمي. ثم بعد ذلك, كثيرون هم الذين درسوا مشكلة التدفق الأعظمي في الشبكات. دينك (Dinic, 1970), قدم تطويراً لخوارزمية التدفق, وقدم كارزانوف (Karzanov, 1974), تحسيناً لتكنيك دينك. لكن أسرع خوارزمية معروفة لدراسة هذه المشكلة حتى الآن هي للعالم سليتور (Sleator, 1980).

(1-10) التدفق والقواطع في الشبكات (Flows and Cuts in Networks).

شبكات الأنابيب لنقل النفط من المصدر إلى المصب هي نموذج للشبكات. حيث يرمز كل قوس لجزء من الأنابيب ونهاية كل قوس يتوافق مع عقدة الربط بين أنبوبين والوزن المرفق بكل قوس e من A, يرمز إلى سعة الأنبوب الموافق لهذا القوس. وبالتالي الشبكة هي نموذج حقيقي لشبكة أنابيب تنقل النفط أو أي سائل من مركز المصدر إلى مركز المصب.

تعريف (1-10): الشبكة وحيدة المصدر ـــ وحيدة المصب: هي بيان موجه مترابط له رأس متمايز يسمى مصدراً له درجة خارجية أكبر من الصفر ورأس متمايز أخر يسمى المصب له درجة داخلية أكبر من الصفر.
الشبكة وحيدة المصدر ـــ وحيدة المصب التي لها المصدر s والمصب t, نرمز لها الشبكة s-t أو اختصاراً N(s, t).

تعريف (2-10): الشبكة السعوية: هي بيان موجه مترابط بحيث إن كل قوس فيه مرفق بوزن غير سالب يسمى سعة القوس cap(e).

تعريف (3-10): لأجل أي مجموعتين X, Y من رؤوس الشبكة N, نرمز بـ $\langle X, Y\rangle$, لمجموعة الأقواس في N والموجهة من رأس في X إلى رأس في Y.
أي أن

$$\langle X, Y\rangle = \{e \in A_N : e = uv , u \in X \ \& \ v \in Y\}$$

تعريف (4-10): لتكن N(s-t) شبكة سعوية, التدفق f في N يكون الدالة $f: A_N \to R^+$ التي تُرفق قيمة حقيقية غير سالبة $f(e)$ بكل قوس بحيث إن

1. $f(e) \leq cap(e)$ وذلك مهما يكن $e \in N$. وهو شرط القيد للسعة.
2. لأجل أي رأس v بحيث $v \notin s$ و $v \notin t$ يكون

$$\sum_{e \in id(v)} f(e) = \sum_{e \in od(v)} f(e) \quad \text{(وهو شرط القيد للصيانة)}$$

الشرط الثاني يسمي شرط صيانة التدفق, لأنه يحافظ على الكمية المتدفقة إلى ومن الرأس v. بمعنى أخر إجمالي الكمية الخارجة من الرأس (عقدة الربط) v, يجب أن تساوي الكمية الداخلة إليه.

تعريف (5-10): كمية التدفق f في الشبكة N, يرمز له $val(f)$, وهو صافي التدفق الذي يخرج من المصدر, أي أن

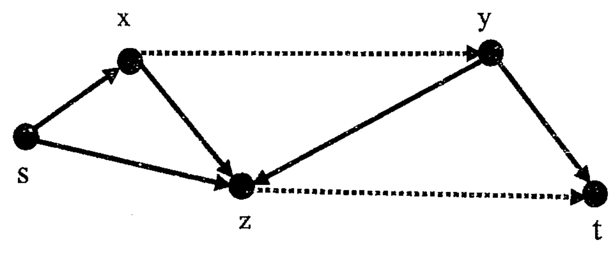
$$val(f) = \sum_{e \in od(s)} f(e) - \sum_{e \in id(s)} f(e)$$

تعريف (10-6): التدفق الأعظمي (maximum flow) f^* في الشبكة N, هو أكبر كمية ممكنة من التدفق وهذا يعني أن $\mathrm{val}(f) \leq \mathrm{val}(f^*)$, لأجل أي تدفق f في الشبكة N.

من تعريف التدفق, يجب أن يكون على الأقل هناك قوس واحد يخرج من المصدر سعته أكبر من الصفر. بمعنى آخر, إذا حذفنا جميع الأقواس الخارجة من المصدر في الشبكة, عندئذٍ لن نحصل على تدفق من المصدر إلى المصب.

تعريف (10-7): لتكن الشبكة N(s, t) وليكن V_s و V_t تجزئة لرؤوس الشبكة V_N بحيث إن $s\in V_s$ و $t\in V_t$. عندئذٍ مجموعة الأقواس المتجهة من رؤوس في V_s إلى رؤوس في V_t, تسمى s-t قاطعة للشبكة N, ويرمز لها $\langle V_s, V_t\rangle$.

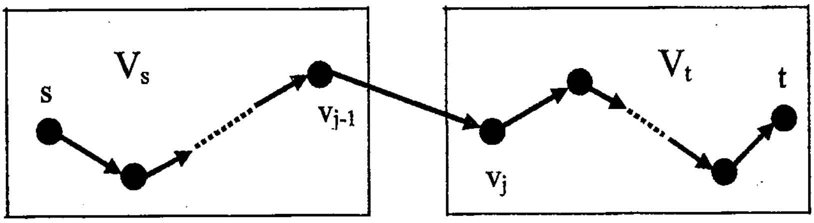
مثال (10-1): نلاحظ في الشبكة N الموضحة في الشكل (10-1) أن الأقواس {xy, zt} هي المجموعة القاطعة في $\langle\{s, x, z\}, \{y, t\}\rangle$, هذا يعني $\langle\{s, x, z\}, \{y, t\}\rangle = \{xy, zt\}$, حيث $V_s = \{s, x, z\}$, $V_t = \{y, t\}$. ومجموعة الأقواس القاطعة هي التي مرسومة بشكل منقط في الشكل (10-1).



الشكل (10-1)

مبرهنة (1-10): ليكن $\langle V_s, V_t \rangle$، s-t قاطعة للشبكة N(s, t). عندئذٍ كل مسار موجه s-t في N يحتوي على الأقل قوساً واحداً في $\langle V_s, V_t \rangle$.

البرهان: لتكن $P = \langle s = v_0, v_1, \ldots, v_n = t \rangle$, متتالية الرؤوس للمسار الموجه s-t في الشبكة N. بما أن $s \in V_s$ و $t \in V_t$, عندئذٍ هناك أول رأس v_j في المجموعة V_t على المسار s-t. والرأس v_{j-1} السابق للرأس v_j في المسار s-t, ينتمي للمجموعة V_s, لاحظ الشكل (2-10). عندئذٍ القوس من v_{j-1} إلى v_j ينتمي إلى $\langle V_s, V_t \rangle$.□



الشكل (2-10)

بشكل مشابه لدراسة مجموعة الأقواس الخارجة من المصدر s إلى المجموعة القاطعة s-t لـِ $\langle \{s\}, V_N - \{s\} \rangle$. يمكن دراسة مجموعة الأقواس الداخلة (الراجعة) إلى المصدر s والمتعلقة بالمجموعة القاطعة, أي مجموعة الأقواس $\langle V_N - \{s\}, \{s\} \rangle$ (مجموعة الأقواس من $\{V_N - \{s\}\}$ إلى الرأس المصدر s, وهي أقواس إرجاع التدفق). بمعنى أخر كمية التدفق في الشبكة, يساوي مجموع التدفق الذي يمر عبر أقواس المجموعة القاطعة $\langle \{s\}, V_N - \{s\} \rangle$ مطروحاً منه كمية التدفق التي تمر عبر الأقواس $\langle V_N - \{s\}, \{s\} \rangle$. من هذه الوجهة, يمكن كتابة تعريف كمية التدفق بالشكل التالي:

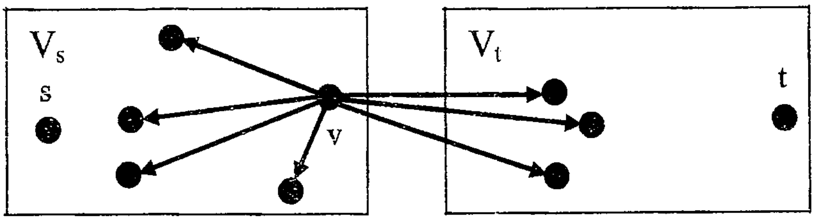
$$val\ (f) = \sum_{e \in \langle \{s\},\ V_N - \{s\} \rangle} f(e) - \sum_{e \in \langle V_N - \{s\},\ \{s\} \rangle} f(e) .$$

مبرهنة (10-2): ليكن $\langle V_s, V_t \rangle$، s-t قاطعة للشبكة N(s-t). عندئذٍ

$$\bigcup_{v \in V_s} od\ (v) = \langle V_s, V_s \rangle \bigcup \langle V_s, V_t \rangle,$$
$$\bigcup_{v \in V_s} id\ (v) = \langle V_s, V_s \rangle \bigcup \langle V_s, V_t \rangle.$$

البرهان: لأجل أي رأس $v \in V_s$, كل قوس موجه من الرأس v, إما يكون في $\langle V_s, V_s \rangle$ أو في $\langle V_s, V_t \rangle$ (لاحظ الشكل (10-3) يوضح الرأس v والأقواس الخارجة منه, حيث يخرج منه 4 أقواس إلى $\langle V_s, V_s \rangle$ و 3 أقواس إلى $\langle V_t, V_s \rangle$).

بشكل مشابه, كل قوس موجه إلى الرأس v, أما يكون في $\langle V_s, V_s \rangle$ أو في $\langle V_t, V_s \rangle$.



الشكل (10-3)

مبرهنة (10-3): ليكن التدفق *f* في الشبكة N(s, t), وليكن $\langle V_s, V_t \rangle$ أي قاطعة s-t في N. عندئذٍ

$$val(f)=\sum_{e\in\langle V_s,V_t\rangle} f(e)-\sum_{e\in\langle V_t,V_s\rangle} f(e)$$

البرهان: حسب تعريف التدفق يكون $val(f)=\sum_{e\in od(s)} f(e)-\sum_{e\in id(s)} f(e)$.

لصيانة التدفق في كل رأس $v\in V_s$, لدينا $\sum_{e\in od(v)} f(e)-\sum_{e\in id(v)} f(e)=0$, حيث $v\neq s$. ينتج من ذلك أن

$$val(f)=\sum_{v\in V_s}\Big(\sum_{e\in od(v)} f(e)-\sum_{e\in id(v)} f(e)\Big)=\sum_{v\in V_s}\sum_{e\in od(v)} f(e)-\sum_{v\in V_s}\sum_{e\in id(v)} f(e)$$

من المبرهنة (2-10) نجد

$$\sum_{v\in V_s}\sum_{e\in od(v)} f(e)=\sum_{e\in\langle V_s,V_s\rangle} f(e)+\sum_{e\in\langle V_s,V_t\rangle} f(e)$$

و

$$\sum_{v\in V_s}\sum_{e\in id(v)} f(e)=\sum_{e\in\langle V_s,V_s\rangle} f(e)+\sum_{e\in\langle V_t,s_s\rangle} f(e)$$

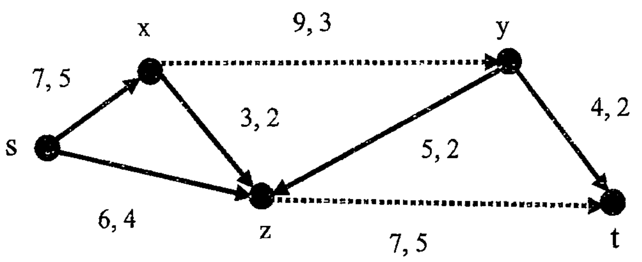
وبالتعويض ينتج

$$val(f)=\sum_{e\in\langle V_s,V_t\rangle} f(e)-\sum_{e\in\langle V_t,V_s\rangle} f(e)\ .\square$$

ملاحظة (10-1): كل قوس في الشبكة N(s, t), مرفق برقمين m, n حيث الرقم اليساري m, يمثل السعة cap, أي أكبر كمية يمكن للأنبوب أن يستوعبها أو ينقلها,

والرقم اليميني يمثل كمية التدفق f التي تجري في الأنبوب. لاحظ في الشكل التالي (4-10), القوس yz له السعة $cap(yz) = 5$ والتدفق $f(yz) = 2$.

مثال (2-10): التدفق f والقاطعة $\langle\{s, x, z\}, \{y, t\}\rangle$, في الشكل (4-10) يوضح المبرهنة (3-10).



الشكل (4-10)

نلاحظ أن

$$val\ (f) = \sum_{e \in \langle\{s, x, z\}, \{y, t\}\rangle} f(e) - \sum_{e \in \langle\{y, t\}, \{s, x, z\}\rangle} f(e)$$
$$= 8 - 2 = 6 .$$

نتيجة (1-10): ليكن التدفق f في الشبكة N(s, t). عندئذٍ

$$val\ (f) = \sum_{e \in id(t)} f(e) - \sum_{e \in od(t)} f(e)$$

البرهان: بتطبيق المبرهنة (3-10) على القاطعة $s\text{-}t = \langle V_N - \{t\}, \{t\}\rangle$ نجد المطلوب, حيث $id(t) = \langle V_N - \{t\}, \{t\}\rangle$.□

(2-10) التدفق الأعظمي والقواطع الصغرى (Max-Flow and Min- Cuts).

هنا سوف ندرس مشكلة إيجاد أكبر كمية للتدفق في شبكة N وإيجاد القاطعة الصغرى. يتم البحث لكي تكون هاتان المشكلتان مثاليتين, أي يجب أن يكون التدفق, أعظم مايمكن, مساوياً إلى السعة والقاطعة يجب أن تكون أصغر مايمكن أي أنها تكاد أن تكون معدومة.

تعريف (8-10): لتكن الشبكة $N(s, t)$ وليكن V_s و V_t تجزئة لرؤوس الشبكة V_N بحيث إن $s \in V_s$ و $t \in V_t$. عندئذٍ سعة القاطعة $\langle V_s, V_t \rangle$, هي مجموع سعات الأقواس للقاطعة $\langle V_s, V_t \rangle$. أي أن

$$cap\left\langle V_s, V_t \right\rangle = \sum_{e \in \langle V_s, V_t \rangle} f(e).$$

تعريف (9-10): القاطعة الصغرى (minimum cut) للشبكة $N(s, t)$, هي القاطعة التي لأضلاعها أقل السعات من القاطعات الأخرى في الشبكة N.

مثال (3-10): أصغر سعة لقاطعة في الشكل (4-10) هي $\langle \{s, x, y, z\}, \{t\} \rangle$, حيث $cap\langle \{s, x, y, z\}, \{t\} \rangle = 11$.

مبرهنة (4-10): ليكن f أي تدفق كيفي في الشبكة $N(s, t)$ ولتكن $\langle V_s, V_t \rangle$ أي s-t قاطعة. عندئذٍ

$$val(f) \leq cap\langle V_s, V_t \rangle.$$

البرهان: لأجل أي قوس لدينا $f(e) \le cap(e)$, ومن المبرهنة (10-3) نجد

$$\begin{aligned} val(f) &= \sum_{e\in\langle V_s, V_t\rangle} f(e) - \sum_{e\in\langle V_t, V_s\rangle} f(e) \\ &\le \sum_{e\in\langle V_s, V_t\rangle} cap(e) - \sum_{e\in\langle V_t, V_s\rangle} f(e) \\ &= cap\langle V_s, V_t\rangle - \sum_{e\in\langle V_t, V_s\rangle} f(e) \\ &\le cap\langle V_s, V_t\rangle. \end{aligned}$$

حيث $f(e)$ قيمة غير سالبة.□

كنتيجة مباشرة للمبرهنة (10-4), النتيجة التالية:

نتيجة (10-2): ليكن f^* تدفقاً أعظمياً في الشبكة N(s, t), و K^* قاطعة صغرى في N(s, t). عندئذٍ $val(f^*) \le cap(K^*)$.

النتيجة التالية تعطي وصف للتدفق المثالي في شبكة N(s, t). عندما التدفق يساوي السعة فإنه يكون أعظم مايمكن.

مبرهنة (10-5): ليكن f تدفقاً في الشبكة N(s, t), و K قاطعة ولنفرض أن $val(f) = cap(K)$. عندئذٍ التدفق f يكون أعظمياً والقاطعة K تكون صغرى.

البرهان: ليكن f_1 تدفقاً ما في الشبكة N(s, t). الأعظمية للتدفق f يأتي بتطبيق المبرهنة (10-4) بالشكل التالي

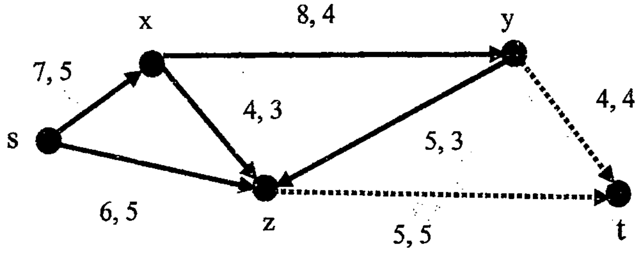
$$\mathrm{val}(f_1) \le \mathrm{cap}(K) = \mathrm{val}(f)$$

أصغرية القاطعة, يمكن إثباته بطريقة مشابهه. بمعنى لتكن K_1 أي قاطعة, عندئذٍ بتطبيق المبرهنة (10-4) نحصل على أصغرية القاطعة K بالشكل التالي

$$\mathrm{cap}(K) = \mathrm{val}(f) \le \mathrm{cap}(K_1)$$

أي أن مثالية التدفق عندما يكون مساوياً للسعة ويبلغ هذه المثالية عندما يكون أعظم مايمكن في قاطعة سعتها أقل مايمكن.□

مثال (10-4): الشبكة N(s-t) في الشكل (10-5) نجد أن $f(N) = 9$ وكذلك السعة للقاطعة $\mathrm{cap}\langle\{s, x, z, y\}, \{t\}\rangle = 9$, أي أن التدفق والقاطعة مثاليان في هذه الشبكة.



الشكل (10-5)

نتيجة (10-3): ليكن $\langle V_s, V_t\rangle$ قاطعة في الشبكة N(s, t) وليكن f التدفق بحيث إن

$$f(e)=\begin{cases} cap(e) & if \quad e \in \langle V_s, V_t \rangle, \\ 0 & if \quad e \in \langle V_t, V_s \rangle. \end{cases}$$

عندئذٍ يكون f تدفقاً أعظمياً في $N(s, t)$ وتكون $\langle V_s, V_t \rangle$ قاطعة صغرى.□

(3-10) حل مشكلة التدفق الأعظمي بإستخدام مسار ازدياد التدفق

(The Max-Flow Problem be Using Augmenting Flow Path).

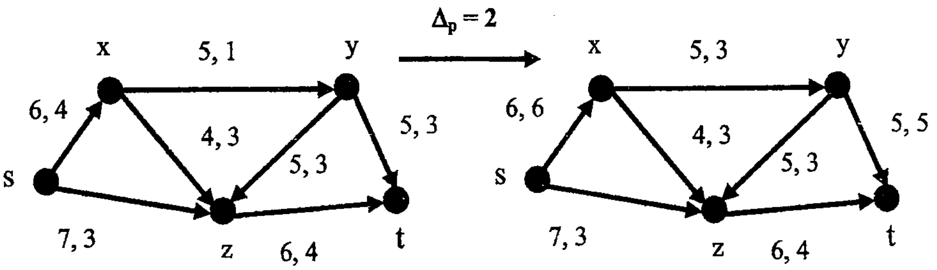
الفكرة الأساسية هنا تقديم طريقة تكفل زيادة التدفق في الشبكة مادام ذلك ممكناً. كل زيادة في التدفق تعتمد على اختيار متتالية من الرؤوس والأقواس التي يمكن زيادة التدفق بها, وهذا نطلق عليه مسار ازدياد التدفق (augmenting flow path).

لنفرض أن f التدفق في الشبكة $N(s, t)$ حيث كل قوس مرفق بسعته. ليكن P مساراً s-t موجه من s إلى t في N

$$P = \langle s, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, t \rangle$$

حيث إن $f(e_i) < cap(e_i)$ لأجل $i = 1, 2, \ldots, k$. دراسة سعة الأقواس تمكننا من زيادة التدفق في كل قوس بمقدار $cap(e_i) - f(e_i)$. للحفاظ على خاصة التدفق المحتمل في كل رأس v_i, يجب أن تكون زيادة التدفق في كل الأقواس متساوية. هذا يعني أنه إذا كان Δ_p يرمز لزيادة التدفق, عندئذٍ أكبر إمكانية لقيمة Δ_p تساوي أصغر قيمة للفرق $\{cap(e_i) - f(e_i)\}$ وذلك لأجل $i = 1, 2, \ldots, k$. أي أن $\max \Delta_p = \min \{cap(e_i) - f(e_i)\}$.

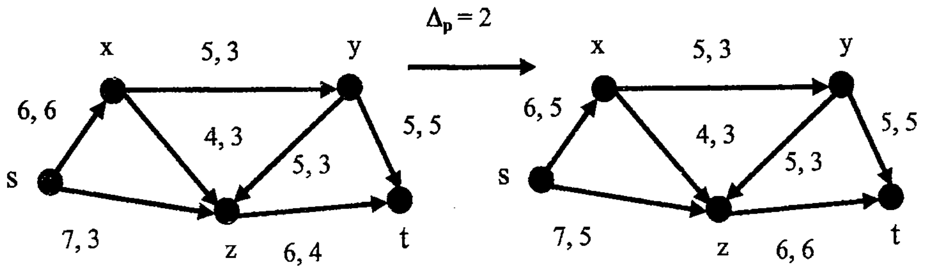
مثال (5-10): لتكن الشبكة N(s, t) في الشكل (6-10, a), نلاحظ أن التدفق الحالي هو $f = 7$. لندرس المسار الموجه $P_1 = \langle s, x, y, t \rangle$, يمكن زيادة التدفق بمقدار $\max \Delta_p = \min \{cap(e_i) - f(e_i) : e_i \in P_1\} = 2$, ويصبح التدفق $f = 9$, لاحظ الشكل (6-10, b).



الشكل **(6-10, a)**

الشكل **(6-10, b)**

ندرس الآن المسار الآخر من s إلى t أي $P_2 = \langle s, z, t \rangle$, في الشكل (6-10, c), يمكن زيادة التدفق بمقدار $\max \Delta_p = \min \{cap(e_i) - f(e_i) : e_i \in P_2\} = 2$, ويصبح التدفق $f = 11$, لاحظ الشكل (6-10, d). نجد أنه لايمكن زيادة التدفق أكثر من ذلك, لأنه لاتوجد مسارات أخرى من المصدر s إلى المصب t.



الشكل **(6-10, c)**

الشكل **(6-10, d)**

نلاحظ أنه لا يمكننا زيادة التدفق بأي مقدار لأن الأقواس التي تنتهي إلى المصب قد أصبحت مشبعة أي أن التدفق يساوي السعة في هذه الأقواس.

تعريف (10-10): شبه المسار (semipath) s-t في الشبكة N(s, t), هو متتالية متناوبة

$$\langle s = v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k = t\rangle$$

من الرؤوس والأقواس التي تشكل المسار s-t ضمن مفهوم البيان غير الموجه لـ N.

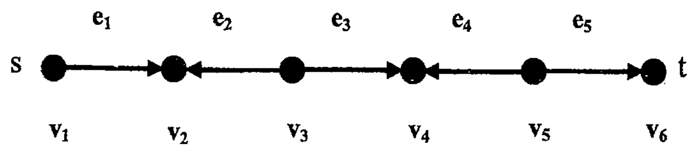
ليكن شبه المسار Q من s إلى t بالشكل التالي:

$$Q = \langle s = v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k = t\rangle$$

نسمي القوس e_i قوساً أمامياً (forward arc) إذا كان يتجه من v_{i-1} إلى v_i ونرمز لمجموعة الأقواس الأمامية Farc, ويكون قوساً خلفياً (backward arc) إذا كان يتجه من v_i إلى v_{i-1} ونرمز لمجموعة الأقواس الخلفية Barc.

نلاحظ أن المسار الموجه هو شبه مسار بحيث تكون كل أقواسه أمامية.

مثال (6-10): ليكن شبه المسار s-t الموضح في الشكل (10-7), الأقواس e_1, e_3, e_5 هي أقواس أمامية (أو أقواس تدفق) والأقواس e_2, e_4 هي أقواس خلفية (أو أقواس إرجاع).



الشكل (10-7)

تعريف (10-11): ليكن التدفق f في الشبكة N(s-t). مسار ازدياد التدفق Q (f -augmenting path)، هو شبه مسار s-t في N، بحيث يمكن زيادة التدفق على كل قوس أمامي وإنقاص التدفق على كل قوس خلفي. هذا يعني أنه لأجل كل قوس e في مسار ازدياد التدفق Q يكون

إذا كان e قوساً أمامياً : $f(e) < cap(e)$

إذا كان e قوساً خلفياً : $f(e) > 0$

نلاحظ أن مسار ازدياد التدفق ليس بالضرورة مساراً موجهاً.

ليكن القوس e على مسار ازدياد التدفق f، ليكن Δ_e كمية معطاة بالشكل

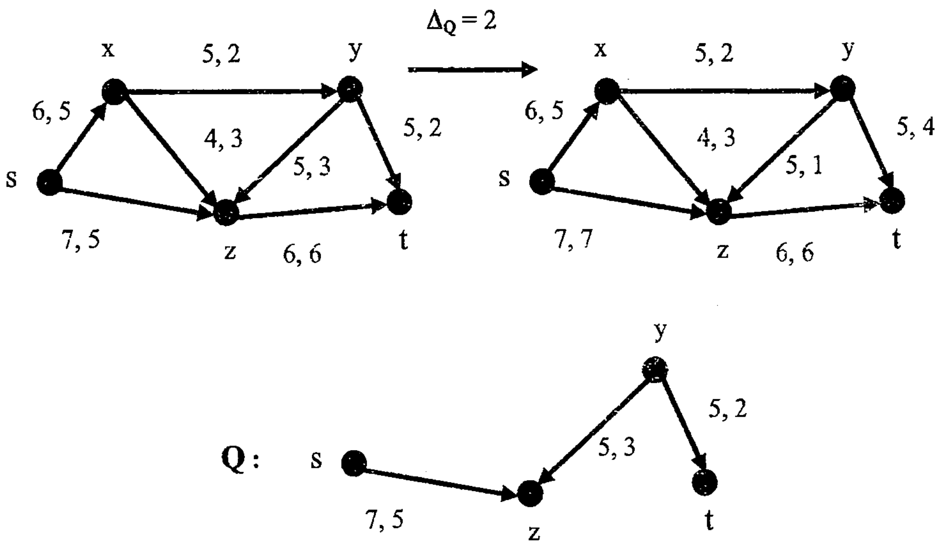
$$\Delta_e = \begin{cases} cap(e) - f(e), & if \quad e \in Farc , \\ f(e), & e \in Barc . \end{cases}$$

نسمي Δ_e قيمة تخامد (slack) القوس e. وتكون قيمة التخامد على القوس الأمامية أكبر زيادة ممكنة في التدفق وعلى القوس الخلفية أكبر نقصان ممكن من التدفق.

صيانة التدفق تتطلب تغيير التدفق على الأقواس في مسار ازدياد التدفق بمقادير متساوية. في شبه المسار Q, أكبر كمية مسموح بها لتغيير التدفق على الأقواس تكون Δ_Q, حيث

$$\Delta_Q = \min_{e \in Q} \{\Delta_e\}$$

مثال (6-10): لتكن الشبكة N(s, t) في الشكل (8,10) التدفق الحالي يكون $f = 8$ (لأنه يساوي التدفق في أصغر مجموعة قاطعة). شبه المسار $Q = \langle s, z, y, t \rangle$, يكون مسار ازدياد تدفق بمقدار $\Delta_Q = \min_{e \in Q} \{\Delta_e\} = 2$.



الشكل (8-10)

مبرهنة (6-10): (Flow Augmentation):

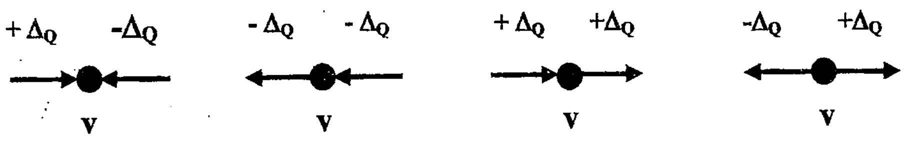
ليكن التدفق f في الشبكة $N(s, t)$, وليكن Q مسار ازدياد التدفق و Δ_Q قيمة التخامد على أقواسه, عندئذٍ زيادة التدفق f_1 تكون

$$f_1(e) = \begin{cases} f(e) + \Delta_Q & if \quad e \in Farc \;, \\ f(e) - \Delta_Q & if \quad e \in Barc \;, \\ f(e) & if \quad e \notin Farc \;, Barc \;. \end{cases}$$

و $val(f_1) = val(f) + \Delta_Q$.

البرهان: من تعريف التخامد Δ_Q لدينا $0 \le f_1(e) \le cap(e)$. الرؤوس التي يمكن من خلالها فقط تغيير كمية التدفق تكون على مسار ازدياد التدفق Q. لنثبت أن f_1 يحقق صيانة التدفق ولذلك يكفي التحقق من الرؤوس الداخلية للمسار Q.

ليكن v أي رأس على مسار ازدياد التدفق Q. القوسان من Q الواقعان على v, لهما حالة واحدة من أربع حالات, لاحظ الشكل (10-9). كمية ربح التدفق في كل حالة إلى أو من v لاتتغير وبذلك يتم المحافظة على ميزة صيانة التدفق, لأن هناك تساوياً في الكمية التي تربحها أو تخسرها وهي Δ_Q.



الشكل (10-9)

لنبرهن أن كمية الزيادة في التدفق هي Δ_Q. التدفق الوحيد الذي يتغير هو على القوس الواقع على المصدر s, أي على أول قوس e_1 في مسار ازدياد التدفق Q.

إذا كان e_1 قوساً أمامياً, عندئذٍ $f_1(e_1) = f(e_1) + \Delta_Q$. وإذا كان e_1 قوس إرجاع, عندئذٍ $f_1(e_1) = f(e_1) - \Delta_Q$. في الحالتين يكون

$$val(f_1) = \sum_{e \in od(s)} f_1(e) - \sum_{e \in id(s)} f_1(e) = \Delta_Q + val(f). \quad \Box$$

مبرهنة (7-10): ليكن f تدفقاً في الشبكة $N(s, t)$. عندئذٍ f يكون تدفقاً أعظمياً إذا وفقط إذا كانت الشبكة N لاتحوي مسار ازدياد للتدفق f في N.

البرهان: $\Leftarrow$ لنفرض أن f تدفق أعظمي في N, عندئذٍ من المبرهنة (6-10) لايوجد مسار ازدياد للتدفق f.

$\Rightarrow$ لنفرض أنه لايوجد مسار ازدياد للتدفق f في الشبكة N. لندرس مجموع كل شبه المسارات التي تبدأ من المصدر s ولها الميزة التالية: لكل قوس أمامي, تخامد موجب (أي يمكن زيادة), ولكل قوس إرجاع, تدفق موجب (أي يمكن إنقاصه). لتكن V_s مجموعة الرؤوس لشبه المسارات هذه.

بما أنه لايوجد مسار ازدياد للتدفق بالفرض, ينتج أن المصب $t \notin V_s$. ليكن $V_t = V_N - V_s$. عندئذٍ $\langle V_s, V_t \rangle$ تكون قاطعة للشبكة $N(s, t)$. من تعريف المجموعتين V_s, V_t, لدينا

$$f(e) = \begin{cases} cap(e) & if \quad e \in \langle V_s, V_t \rangle, \\ 0 & if \quad e \in \langle V_t, V_s \rangle. \end{cases}$$

من النتيجة (3-10), نستنتج أن f تدفق أعظمي. $\Box$

مبرهنة (8-10): (التدفق الأعظمي والقاطعة الصغرى).

لتكن الشبكة N(s-t), وليكن f^* تدفقاً أعظمياً فيها, و $\langle V_s, V_t\rangle$ قاطعة صغرى في N. عندئذٍ

$$val(f^*) = cap\langle V_s, V_t\rangle.$$

البرهان: نلاحظ أن القاطعة المعرفة في المبرهنة (7-10) لها تدفق أعظميي يساوي السعة.□

(4-10) خوارزميات التدفق الأعظمي (The Max-Flow Algorithms).

هنا نقدم لبعض الخوارزميات التي تستخدم مسار ازدياد التدفق والقاطعة الصغرى في الشبكة لزيادة التدفق إلى أقصى حد ممكن. عندما تصل كمية التدفق بشكل متساوي مع السعة نحقق بذلك أمثلية التدفق, أي الحالة المثلى للتدفق في الشبكة والتي لايمكن زيادتها. بعض الخوارزميات سوف تعتمد على اختيار متتالية من الرؤوس والأقواس لتشكيل مسار ازدياد التدفق ومنها يضيف إلى ذلك استخدام القاطعة الصغرى والأخر يستخدم الثانية من خلال الأولى.

في 1962, أوضح فورد و فولكيرسون (Ford and Fulkerson) أن مشكلة التدفق الأعظمي في شبكة N(s, t, V, A) (شبكة مصدرها s ومصبها t ورؤوسها V وأقواسها A) هي من التعقيد $O(|V|^2|A|)$. وفي 1970, قدم دينك (Dinic) تطويراً لعمل الخوارزمية ولكن بنفس التعقيد. ادميندز وكارب (Edmonds and Karp) في 1972 قدما تعديلاً للخوارزمية السابقة وأعطيا

تعقيداً للمشكلة يعتمد على عدد الأقواس $O(|V||A|^2)$ وهو أبسط من التعقيد السابق عندما تكون الشبكة كمسار فقط أي عدد الأقواس أقل من عدد الرؤوس وهي حالة خاصة. في 1974, كارزنوف (Karzanov), قدم تحسيناً للخوارزمية بحيث أعطى التعقيد كتابع للرؤوس فقط بالشكل $O(|V|^3)$. وفي 1980, قدم سليتير أفضل خوارزمية من حيث سرعتها في التنفيذ وبرهن أن مشكلة إيجاد التدفق الأعظمي في شبكة N(s, t, V, A, cap) هي من التعقيد $O(|V||A| \log(|V|))$, حيث نعلم أنه عندما يكون |V| كبيراً بقدر كافي و N ليست مساراً, فإن $\log(|V|) < |V| \leq |A|$.

سوف نعرض في هذه الفقرة لثلاث خوارزميات الأولى لفورد و فولكيرسن, الثانية لادميندز و لكارب و الثالثة هي ضم للخوارزميتين معاً بحيث تُفعل الثانية من خلال الأولى.

ليكن $(u, v) = uv$ قوساً موجهاً من الرأس u إلى الرأس v, نقول عن v أنه رأس أمامي أو رأس القوس وعن u رأس خلفي أو زيل القوس.

خوارزمية (1-10) (The Ford and Fulkerson Algorithm):

المعطيات : N(s, t) شبكة تدفق.

المخرجات : التدفق الأعظمي f^* في N(s, t).

<u>خطوات الخوارزمية:</u>

1- لأجل كل قوس e∈N(s, t), $f(e) := 0$.

2- بينما يوجد هناك مسار لازدياد التدفق, كرر.

1.2- جد المسار Q لازدياد التدفق f^* من s إلى t.

2.2- ليكن $\Delta_Q = \min_{e\in Q} \{\Delta_e\}$, حيث Δ الزيادة الممكنة للتدفق في القوس e.

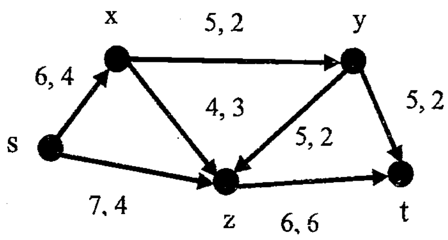
3.2- لأجل كل قوس e∈Q, إذا كان e قوساً أمامياً ضع

$f^*(e) := f^*(e) + \Delta_Q$, وإلا $f^*(e) := f^*(e) - \Delta_Q$.

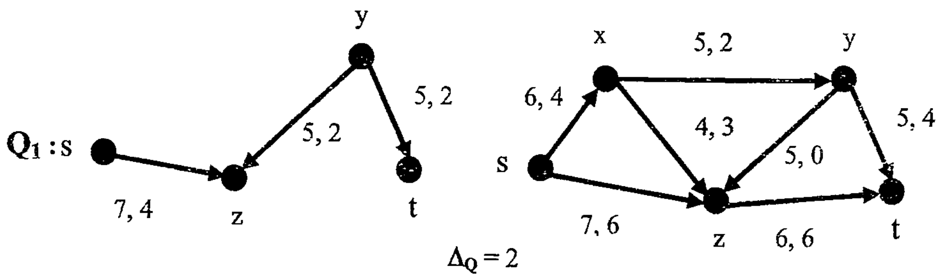
4.2- التدفق الأعظمي يكون f^*.

مثال (7-10): استخدم الخوارزمية (1-10) لإيجاد التدفق الأعظمي للشبكة الموضحة في الشكل (10-10).

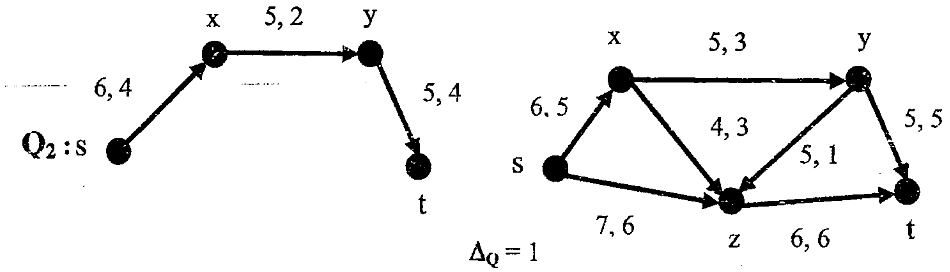
الحل: نلاحظ في المسار الأول $Q_1 = \langle s, z, y, t\rangle$, يمكن زيادة التدفق بمقدار $\Delta_{Q1} = 2$, لاحظ الشكل (10-10, a). في الشبكة الناتجة, المسار الثاني $Q_2 = \langle s, x, y, t\rangle$, يمكن زيادة التدفق بمقدار $\Delta_{Q2} = 1$, لاحظ الشكل (10-10, b). كما نلاحظ لاتوجد مسارات أخرى من s إلى t بحيث يمكننا زيادة التدفق من خلالها وهذا نطلق عليه حد إشباع الشبكة. أخيراً, نجد أن $f^* = 11$.



الشكل (10-10)



الشكل (10-10, a)



الشكل (10-10, b)

للبحث عن مسار ازدياد التدفق, استخدم ادميندز و كارب معاً, عملية البحث بالعرض أولاً مع أقل عدد من الأقواس. الخوارزمية (10-2) إما تعطي مسار ازدياد التدفق أو تعيد القاطعة الصغرى والتي تشير إلى التدفق الحالي على أنه التدفق الأعظمي.

خوارزمية (2-10) إيجاد مسار الازدياد (Finding an Augmenting Path).

المعطيات : $N(s, t)$ شبكة وتدفقها f.

المخرجات : مسار التدفق الأعظمي Q للتدفق f أو القاطعة الصغرى s-t مع كمية التدفق $val(f)$.

خطوات الخوارزمية:

1- ضع في البداية $V_s := \{s\}$.

2- رقم الرأس s بالرقم 0.

3- ابدأ مع $i := 1$.

4- بينما مجموعة الرؤوس V_s لاتحوي المصب t, كرر لإيجاد جميع المسارات من s على t.

1.4- إذا كان هناك قوس e يمكن استخدامه, أعطه أقل ترقيم ممكن, حيث v رأس القوس e.

2.4- ليكن $w \neq v$ رأساً, ضع w رأساً لقوس يكون ذيله v.

3.4- أعطِ للرأس w الترقيم i.

4.4- $V_s := V_s \cup \{w\}$.

5.4- $i := i + 1$.

وإلا

5- ارجع $\langle V_s, V_N - V_s \rangle$ قاطعة s-t (قاطعة بين s و t).

6- أعد بناء مسار ازدياد التدفق Q بشكل تراجعي من t إلى s.

7- ارجع مسار ازدياد التدفق f ويكون Q.

فورد, فولكيرسن, ادميندز و كارب قدموا الخوارزمية (3-10)، وهي تعتبر اتحاداً للخوارزميتين معاً بحيث تعمل الثانية من خلال استدعائها في أثناء عمل الخوارزمية الأولى.

الشجرة T المشكلة من رؤوس V_s, تسمى شجرة حدودية وتكون القاطعة الصغرى هي الأقواس الفاصلة بين رؤوس T و $V_N - T$.

خوارزمية (3-10) التدفق الأعظمي (FFEK – Maximum Flow):

المعطيات : N(s, t) شبكة تدفق.

المخرجات : التدفق الأعظمي f^* في الشبكة N(s, t).

<u>خطوات الخوارزمية:</u>

1- لأجل كل قوس $e \in N(s, t)$, ضع $f^*(e) = 0$.

2- كرر.

1.2- طبق الخوارزمية (2-7) لإيجاد مسار ازدياد Q للتدفق f^*.

2.2- ليكن $\Delta_Q = \min_{e \in Q} \{\Delta_e\}$, حيث Δ الزيادة الممكنة للتدفق.

3.2- لأجل كل قوس e∈Q, إذا كان e قوساً أمامياً ضع

$f^*(e) := f^*(e) + \Delta_Q$ وإلا $f^*(e) := f^*(e) - \Delta_Q$

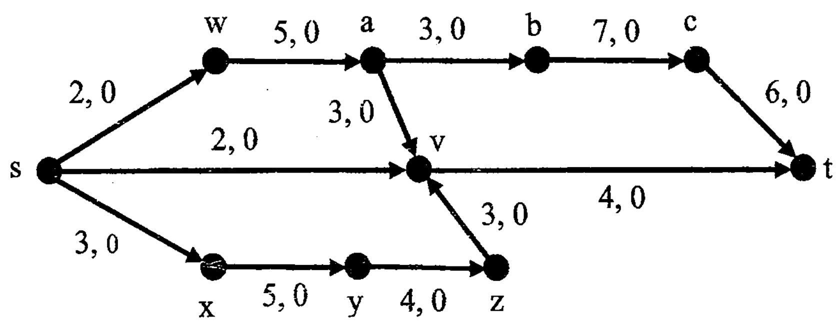
4.2- حتى لايبقى مساراً لازدياد التدفق f^* في الشبكة N(s, t).

3- أرجع التدفق الأعظمي يكون f^*.

4- أرجع الشجرة الحدودية T والقاطعة الصغرى.

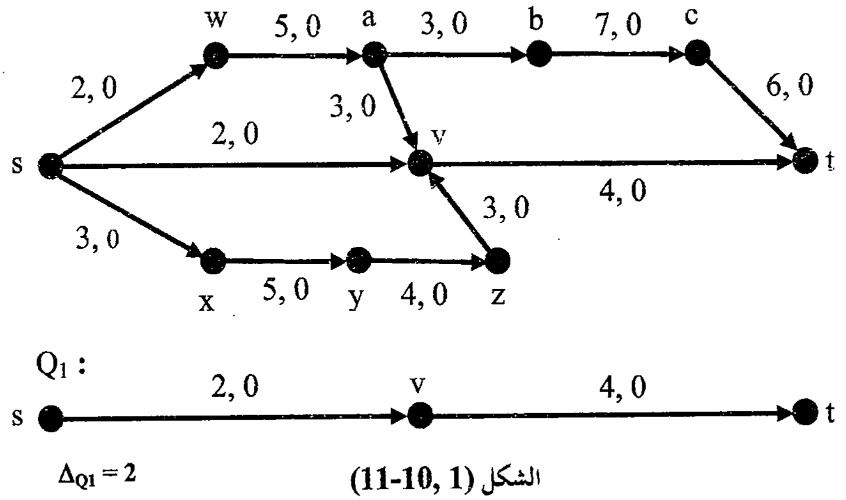
ملاحظة: عند إيجاد التدفق لشبكة مرفق بأقواسها رقم واحد, هذا الرقم هو سعة القوس ويكون التدفق في البداية صفراً لكل الأقواس.

مثال (8-10): لتكن الشبكة N(s, t) الموضحة في الشكل (11-10) مع التدفق $f = 0$. جد التدفق الأعظمي وذلك بتطبيق الخوارزمية (3-10).



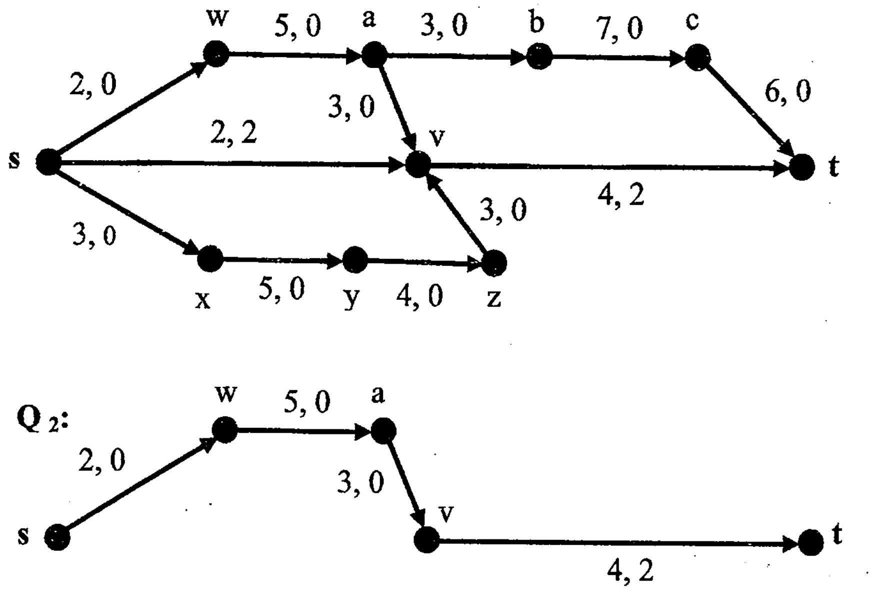
الشكل (11-10)

الحـل: الخطوة 1: نختار أقصر مسار لازدياد التدفق من s إلى t, أي مسار يمكن زيادة التدفق فيه مع أقل عدد من الأقواس. نلاحظ التدفق في الشبكة $N(s, t)$ هو $val(f) = 0$ والمسار $Q_1 = \langle s, v, t \rangle$ أقصر مسار ويمكن زيادة التدفق فيه بمقدار $\Delta_{Q1} = 2$, لأن أقل مقدار من التدفق يمكن زيادته على أقواس المسار هو 2, لاحظ الشكل (11-10, 1).



الشكل (11-10, 1)

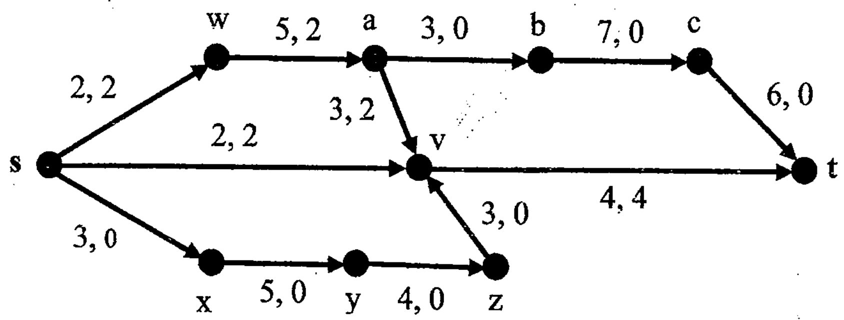
الخطوة 2: لدينا التدفق في الشبكة الناتجة من الخطوة الأولى $val(f) = 2$ وأقصر مسار $Q_2 = \langle s, w, a, v, t \rangle$ ويمكن زيادة التدفق فيه بمقدار $\Delta_{Q2} = 2$, لاحظ الشكل (11-10, 2).

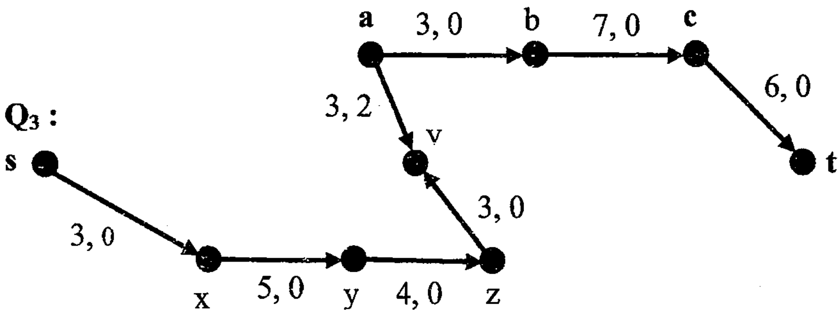


$\Delta_{Q2} = 2$

الشكل (11-10, 2)

الخطوة 3: لدينا التدفق في الشبكة الناتجة من الخطوتين السابقتين 4 = val(*f*) وأقصر مسار $Q_3 = \langle s, x, y, z, v, a, b, c, t\rangle$ ويمكن زيادة التدفق فيه بمقدار $\Delta_{Q3} = 2$، لاحظ الشكل (11-10, 3). حيث القوس e = av هو قوس خلفي ويمكن حسب تعريف ازدياد التدفق إنقاص التدفق فيه بمقدار 2.



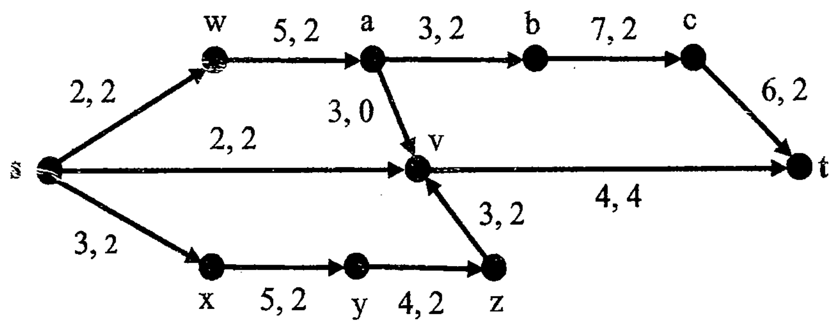


$\Delta_{Q3} = 2$ الشكل (11-10, 3)

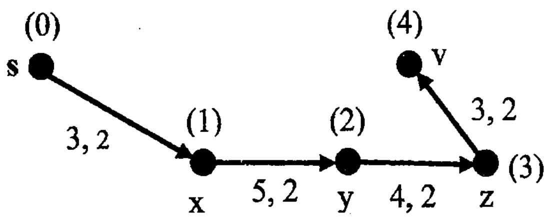
الخطوة 4: نلاحظ أن $V_s = \{s, x, y, z, v\}$, هذه المجموعة مشكلة بعداد الحلقة في الخوارزمية (10-2) ويقف العداد عندما يصل إلى المصب t بحيث $t \notin V_s$. الأقواس الحدودية بين V_s و $V_N - V_s$, هي القوس $e = sw$ من المصدر s إلى الرأس w والقوس $e = vt$ من الرأس v إلى المصب t. وهي آخر الأقواس التي تنتج من عملية تراجعية لبناء مسارات الازدياد من t إلى s والتي تتجه من المجموعة V_s إلى $V_N - V_s$. إذن القاطعة الصغرى هي القوسان $\{e = sw, e = vt\}$ والتي تعني

$$\text{Cut (s-t)} = \langle V_s, V_N - V_s \rangle = \langle \{s, x, y, z, v\}, \{w, a, b, c, t\} \rangle$$

ونلاحظ أن $val(f) = cap\langle V_s, V_N - V_s \rangle = 6$. لاحظ في الشكل (11-10, 4). لاحظ في نفس الشكل أن الشجرة T هي الشجرة المشكلة على رؤوس المجموعة V_s ونسميها شجرة حدودية, أي أن القاطعة الصغرى تكون مجموعة الأقواس التي تخرج من رؤوس T إلى رؤوس المجموعة $V_N - T$.



T :

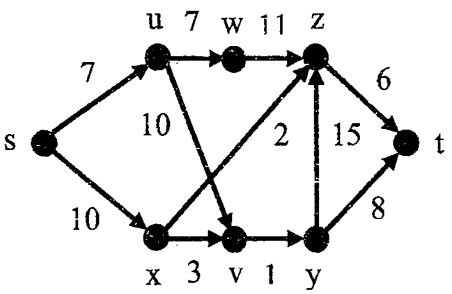


$V_s = \{s, x, y, z, v\}$

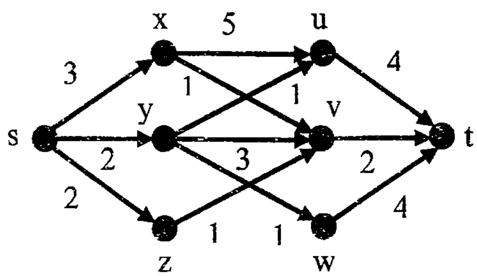
الشكل (11-10, 4)

تمـــــــاريـن 10:

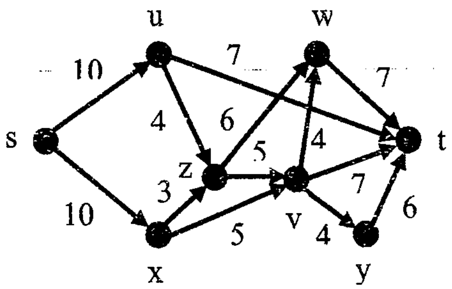
1. استخدم المبرهنة (10-5) لإيجاد التدفق الأعظمي والقاطعة الصغرى في الشبكات التالية:



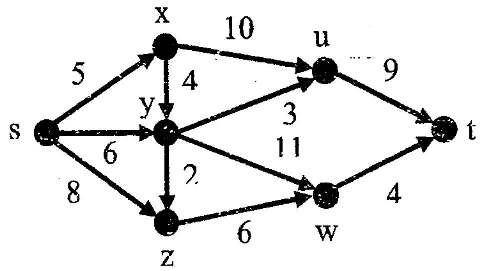
(a)



(b)

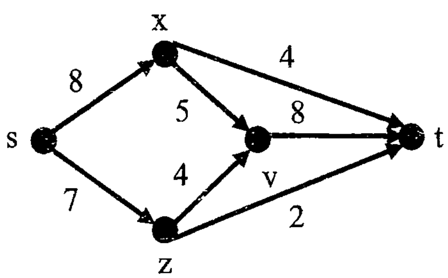


(c)

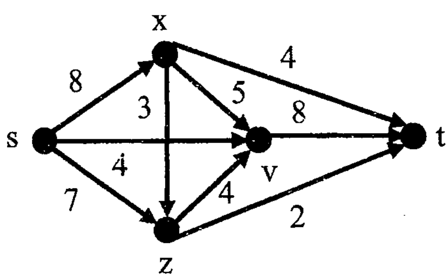


(d)

2. جد كل القواطع s-t في الشبكات التالية وحدد القواطع الصغرى منها.



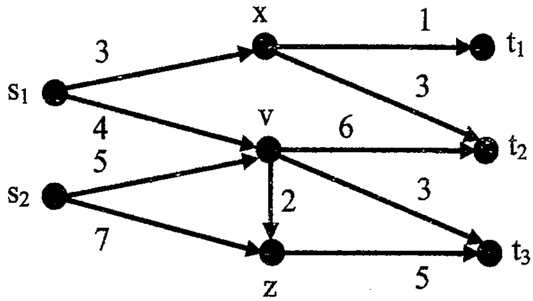
(a)



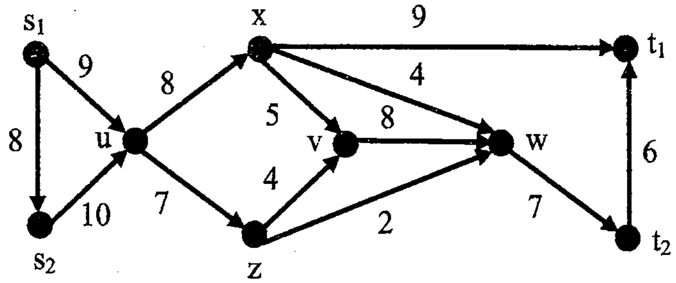
(b)

3. صف كيف يمكن تحويل شبكة متعددة المصادر والمصبات إلى شبكة وحيدة المصدر والمصب.

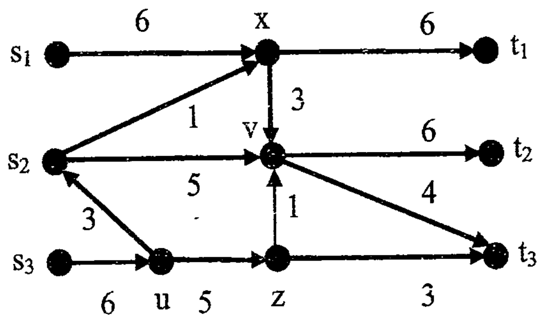
4. استخدم التحويل في التمرين 3, لحل مشكلة إيجاد مجموع التدفق الأعظمي في شبكة تحوي مصدرين وثلاثة مصبات, والشبكة موضحة في الشكل التالي. استخدم المبرهنة (10-5) لتأكيد النتيجة.



5. استخدم التحويل في التمرين 3, لإيجاد التدفق الأعظمي الكلي من مصدرين إلى مصبين في الشبكة الموضحة في الشكل التالي. استخدم المبرهنة (10-5) لتأكيد النتيجة.

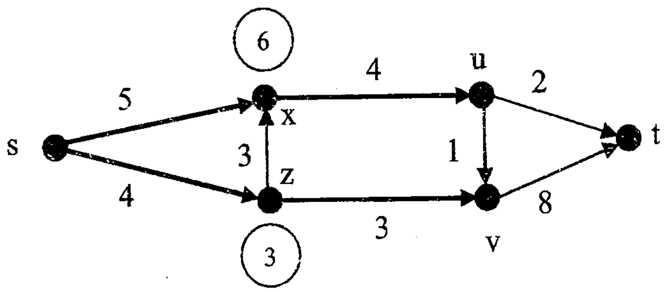


6. استخدم التحويل في التمرين 3, لإيجاد التدفق الأعظمي الكلي من ثلاثة مصادر s_1, s_2, s_3 إلى ثلاثة مصبات t_1, t_2, t_3 في الشبكة الموضحة في الشكل التالي. استخدم المبرهنة (10-5) لتأكيد النتيجة.



7. a.. بفرض أن بعض الرؤوس في الشبكة N(s, t) لها سعات تعادل التدفق الذي يمكن مروره خلالها. كيف يمكن تحويل هذه الشبكة إلى شبكة مماثلة للشبكات التي تم دراستها في الفصل (أي السعات والتدفق من خلال الأقواس).

b. استخدم التحويل في التمرين (a), لإيجاد مجموع التدفق الأعظمي في الشبكة في الشكل, حيث الدوائر تتضمن السعة للرأس المجاور لها. استخدم المبرهنة (5-10) لتأكيد النتيجة.



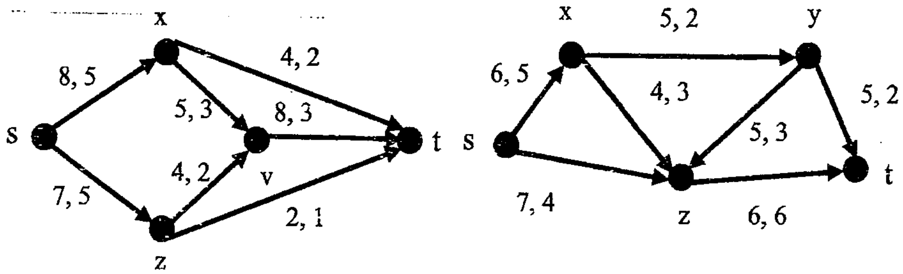
8. لتكن A_1 مجموعة جزئية من في الشبكة N(s, t) وبفرض أن كل مسار موجه من s إلى t يحتوي قوس من A_1 على الأقل.

a. برهن أنه توجد قاطعة $\langle V_s, V_t\rangle$ في N(s, t), بحيث إن $\langle V_s, V_t\rangle \subseteq A_1$.

b. أعطِ مثالاً للطلب (a).

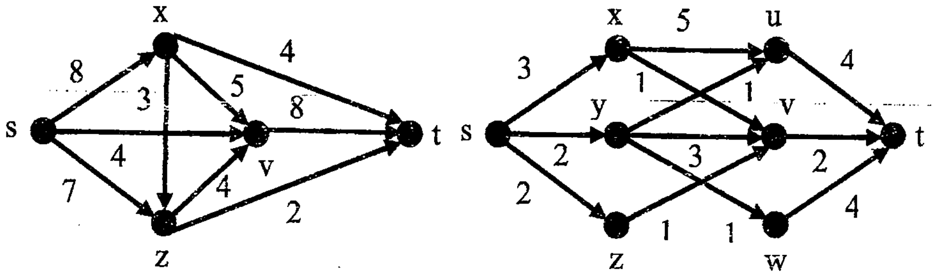
9. برهن النتيجة (3-10) (استخدم المبرهنتين (3-10), (5-10)).

10. جد كل مسارات التدفق الأعظمي لكل من البيانات التالية:



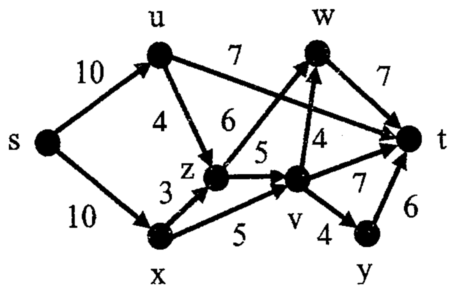
(a) **(b)**

11. باستخدام الخوارزمية (3-10), جد التدفق الأعظمي والقاطعة الصغرى للبيانات التالية:

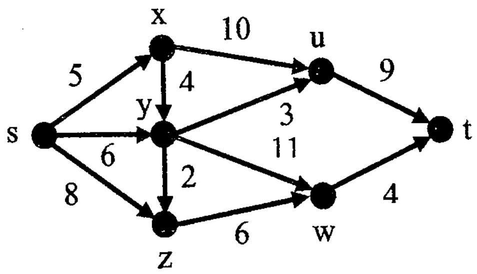


(a) **(b)**

12. باستخدام الخوارزمية (3-10), جد التدفق الأعظمي والقاطعة الصغرى للبيانات التالية:



(a)



(b)

13. أربع عائلات (عائلة أحمد, عائلة زياد, عائلة محفوض, عائلة محمود), يريدون الذهاب من مكان واحد إلى حفلة في مكان ما. هناك أربع سيارات لنقل أفراد هذه العائلات, حيث يمكن للسيارات أن تنقل عدداً من الأفراد كالتالي:

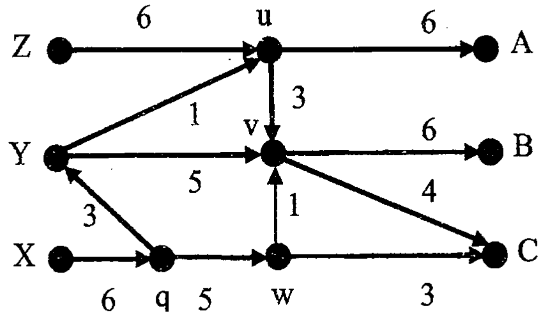
السيارة الأولى تنقل 4 أفراد, السيارة الثانية تنقل 3 أفراد, السيارة الثالثة تنقل 3 أفراد, السيارة الرابعة تنقل 4 أفراد. هناك أربعة أفراد في كل عائلة وكل سيارة لايمكن أن تنقل أكثر من فردين من كل عائلة. أعطِ حلاً لهذه المشكلة بطريقة التدفق الأعظمي لنقل أكبر عدد من الأفراد إلى الحفلة.

14. سبعة أنواع من المواد الكيمائية الخطرة ومن كل نوع يوجد ثلاث حاويات. يتم نقل الحاويات في خمس شاحنات نقل وسعة كل شاحنة على التوالي 3 ,4 ,5 ,4 ,6 حاوية. بسبب أخطار النقل, لايمكن للشاحنة نقل أكثر من حاوية واحدة لنفس المادة الكيميائية. حدد ماإذا كان بالإمكان نقل 21 حاوية في الشاحنات الخمسة.

15. اكتب برنامج للخوارزمية (3-10) واختبره على الشبكات في التمارين (11), (12).

16. لشركة جزازات أعشاب ثلاثة مخازن X, Y, Z وثلاثة متاجر A, B, C. في المخازن على التوالي 900 ,500 ,500 جزازة أعشاب. مطلوب بشكل مباشر من المتاجر على التوالي 600 ,600 ,700 جزازة (يجب نقل الجزازات من المخازن إلى المتاجر, أي مكان التسليم). في البيان الموضح للمشكلة, سعة

الأقواس تمثل الحد الأعلى لعدد الجزازات التي يمكن نقلها من المخازن في يوم واحد في الشاحنات على الطريق. الرؤوس في الوسط تمثل محطة نقل حيث يمكن للشاحنات الناقلة الصيانة والتزود بالوقود. هل يمكن تأمين المطلوب وكيف يمكن إنهاء الطلب.



معجم المصطلحات العلمية

A

Adjacent	مجاور
Adjacent Matrix	مصفوفة التجاور
Ascii	شفرة أسكي
Arc	قوس
Asymmetric	لاتناظري
Arc sets	مجموعة أقواس
Augmenting flow path	مسار ازدياد التدفق
f-Augmenting path	f-مسار ازدياد

B

Bipartite graph	بيان ثناي التجزئة
n-Bartite graph	بيان n–تجزئة
Bridge	جسر
Block	كتلة
Binary Trees	الأشجار الثنائية
Bit	بت
Backward arc	قوس خلفي

C

Cubic graph	بيان تكعيبي
Complete graph	بيان تام
Complement graph	بيان متمم

Complete n-partite Graph	بيان n–تجزئة تام
Complete bipartite graph	بيان ثنائي التجزئة تام
Cartesian product	الجداء الديكارتي
Cubic	تكعيبي
n-Cobe	n-تكعيبي
Contraction graphs	تقليص البيانات
Contractible	قابل للتقليص
Complete symmetric digraph	بيان موجه متناظر تام
Circuit	دورة
Cycle	حلقة
Connected	مترابط
Center	مركز
Connectivity in graph	الترابط في البيان
n-Connected	n-مترابط
n-Complementary	n-متمم
Critical block	كتلة حرجة
Codeword	كلمة شيفرة
Coloring	تلوين
k-Chromatic number	k-عدد لوني
Chromatic number of map	عدد التلوين لأوجه البيان
Chromatic polynomial	دالة التلوين
Crossing number	عدد التقاطع
Cover vertex	تغطية رأس
Cover the edges	تغطية أضلاع
Connected dominating	سيطرة مترابطة

Connected domatic number	عدد مجموعات سيطرة مترابطة
Two-Color Ramsey number	لوني-عدد رامزي
k-Coloring	k-لون
$(G_1, G_2, \ldots, G_k : p)$-Coloring	$(G_1, G_2, \ldots, G_k : p)$-لون
2-Coloring	2-لون
$(G_1, G_2 : p)$-Coloring	$(G_1, G_2 : p)$-لون
$(r, s : p)$-Coloring	$(r, s : p)$-لون
Capacity	السعة

D

Directed Graph	بيان موجه
Digraph	بيان موجه
Degree	درجة
Degree Matrix	مصفوفة الدرجة
Disjoint	منفصل
Direct product	الجداء المباشر
Degree sequence	متتالية الدرجة
Digraph	بيان موجه
Directed edge	ضلع موجه
Directed graph	بيان موجه
Directed loop	عروة موجهة
Digraphical	قابل للرسم
Disconnected	غير مترابط
Distance	مسافة
Diameter	قطر

Data	معطيات
Directed Tree	شجرة موجهة
DeBruijn sequence	سلسلة ديبرويجن
(2, n)-DeBruijn	(2, n)-ديبرويجن
Dodecahedron	أثني عشر وجه
Decomposition	تحليل
Decomposition of graphs	تحليل البيانات
Domination	سيطرة
Domination in graph	السيطرة في البيان
Domination of vertices	سيطرة رؤوس البيان
Dominating set	مجموعة سيطرة
Domination number	عدد السيطرة
k-Dominating set	k-مجموعة سيطرة
k-Domination number	عدد السيطرة من الدرجة k
k-Distance domination set	k-مسافة مجموعة سيطرة
k-Distance domination number	عدد السيطرة من المسافة k
Domination and Independence	السيطرة والاستقلال
Domination perfect	السيطرة المثالية
Domatic set	مجموعة السيطرة المنفصلة
Domatic number	عدد السيطرة المنفصلة

E

Edge	ضلع
Empty graph	بيان فارغ

End vertex	رأس طرفي
Edge-Adjacency Matrix	مصفوفة التجاور للأضلاع
Eccentricity	الاختلاف المركزي
Edge-connectivity	الترابط للأضلاع
n-Edge connected	n-ضلع مترابط
Edge-coloring	تلوين الأضلاع
Edge chromatic sum	مجموع عدد التلوين
Edge sum chromatic sum	عدد مجموع التلوين للأضلاع
Embeddable	قابل للغمر
Eulerian graph	بيان أولر
Eulerian digraph	بيان أولر الموجه

F

Finite graph	بيان منتهي
Forest	غابة
Father	أب
Fibonacci	فيبوناتشي
Frequently	تكرار
Four color problem	مسالة الألوان الربعة
Factorization	تحليل إلى عوامل
1-Factor	1-عامل
k-Factor	k-عامل
Flow	التدفق
Forward act	قوس أمامي

G

Graph	بيان
Graphical	قابل للرسم
Girth	خصر
Graph Coloring	تلوين البيان
Global dominating set	مجموعة سيطرة شاملة
Global dominating number	عدد السيطرة شاملة

H

Homeomorphic	متكافئين توبولوجياً
Hamiltonian graph	بيان هاملتون
Hamiltonian cycle	حلقة هاملتون
Hamiltonian path	مسار هاملتون
Hamiltonian digraph	بيان هاملتون الموجه

I

Isolated vertex	رأس معزول
Infinite graph	بيان لانهائي
Isomorphism	تماثل
Identical	تطابق
Incidence matrix	مصفوفة التقاطع
Intersection graphs	تقاطع البيانات
Indegree	الدرجة الداخلية
Indegree matrix	مصفوفة الدرجة الداخلية
Imbedding	قابل للغمر
Independence in graph	الاستقلال في البيان
Independent set	مجموعة مستقلة

Independent domatic number	عدد مجموعات السيطرة المستقلة

J

Join graphs	ربط البيانات

L

Loop	عروة
Loop graph	بيان بعروات
Lexicographic product (Composition)	تركيب البيانات
Line graph	بيان المنقول
Leaf	ورقة
Labelled graph	بيان مرمز
Left child	أبن أيسر
Letter	رمز

M

Max degree	أكبر درجة
Min degree	أصغر درجة
Multiple edge	ضلع مضاعف
Multiple graph (multigraph)	بيان مضاعف
n-Multiplicit of graph	n-تعددية للبيان
Minimal block	كتلة صغرى
Minimum Weight Trees	أشجار القياس الصغرى الموزونة
Matching	تجزئة مستقلة
Maximum matching	أكبر تجزئة مستقلة
Map-coloring	تلوين الخرائط
Map	خريطة
Maximal planar graph	مستوي أعظمي

Weak with respect	ضعيف الاتصال
M-alternating path	M-مسار متناوب
M-augmenting path	M-مسار ازدياد
Marriage Theorem	نظرية الزواج
Matched	مقترنة بـ
Minus dominating function	دالة السيطرة الناقصة
Minus domination number	عدد السيطرة الناقصة
Maximum flow(Max-Flow)	التدفق الأعظمي
Minimum cut (Min-Cut)	لقاطعة صغرى

N

Null graph	بيان تافه
NP-Complete	NP-تعقيد
Network	شبكة
Network of Flow	شبكة تدفق

O

Order	رتبة
Operations on graph	العمليات على البيان
Outdegree	الدرجة الداخلية

P

Path	مسار
Program	برنامج
Planar graph	بيان مستوي
Postman problem	مشكلة ساعي البريد
Pancyclic graph	بيان شامل الحلقات
Perfect matching	تجزئة مستقلة مثالية

Planar grid graph -	بيان شبكي مستوي
k-Packing	kحزمة

R

Regular graph	بيان منتظم
r-Regular graph	r-بيان منتظم
r-Regular digraph	r-بيان موجه منتظم
Reachability Matrix	مصفوفة الوصول
Radius	نصف قطر
Root	جذر
Right child	أبن أيمن
Region	وجه (منطقة)
Regions	مناطق
Ramsey Theory	نظرية رامزي
Ramsey number	عدد رامزي
Ramsey number calculations	حساب أعداد رامزي
Ramsey coloring	تلوين رامزي

S

Size	قياس
Simple graph	بيان بسيط
Subgraph	بيان جزئي
Spanning subgraph	بيان جزئي موسع
Special graphs	بيانات خاصة
Self-complementary	متمم ذاتي
Strong product	الجداء الشديد

Symmetric	متماثل
Strongly-connected	متصل بشدة
Spanning tree	شجرة موسعة (مولدة)
Sum coloring	مجموع التلوين
Semi-Eulerian	شبه أولري
Semi-Hamiltonian	شبه هاملتوني
Shortest Insertion Algorithm	خوارزمية الإقحام الأقصر
Stability	الاستقرار
Stable	مستقر
Stable matching	تجزئة مستقلة مستقرة
Stable of Marriage	استقرار الزواج
Star graph	بيان نجمي
Signed domination function	دالة سيطرة مرمزة
Signed domination number	عدد سيطرة مرمزة
Source	مصدر (منبع)
Sink (Target)	مصب
Semipath	شبه مسار
Slack	تخامد

T

Trivial graph	بيان تافه
Tournament	بيان دوري
Trial	رحلة
Tree	شجرة
Trees and Computer Science	الأشجار وعلوم الحاسب

Trees and Huffman Codes	الأشجار وشفرات هوفمان
Text	نص
Thickness	السمك
Traveling Salesman Problem	مشكلة البائع المتجول
Toroidal grid graph	بيان شبكي حلقي
Total dominating	سيطرة كاملة
Total domatic sets	مجموعات سيطرة تامة
Transitive	متعدي

U

Undirected graph	بيان غير موجه
Union	اتحاد
Undirected	غير موجه

V

Vertex	رأس
Vertices	رؤوس
Vertex-cut	رأس قاطع
Vertex-coloring	تلوين رأس
Vertex chromatic sum	مجموع عدد تلوين الرؤوس
Vertex sum chromatic	عدد مجموع تلوين الرؤوس
Vizing's Conjecture	تخمين فيزينج
Vertex-vertex cover	تغطية رأس لرأس

W

Wheel	عجلة

Walk	مسلك
Weighted graph	بيان موزون
Weighted domination	سيطرة موزونة

Bibliography المراجع

1. Jay Adamsson and R. Bruce Richter, Arrangements, circular arrangements and the crossing number of $C_7 \times C_n$. J. Combin, Theory Ser, B 90 (2004), no 1, 21-39
2. Ali A. Ali, Introduction to Graph Theory., Iraq, Mosul (1983).
3. R. Anitha and R. Lekshmi, N-Sun decomposition of complete graphs and complete bipartite graphs., Proceedings of world academy of science, engineering and technology., 21 (2007), 262-266.
4. Sara Baase, Computer Algorithms., United States, (1988).
5. M. Behzad, G. Chartrand, L. Lesniak-Foster, Graphs and Digraphs, Wadsworth International Group, United States, (1981).
6. Lowell W. Beineke and Richard D. Ringeisen., On the number of products of cycles and graphs of order four., Journal of Graph Theory, v 4, Issue 2, (2006) 145-155.
7. Lowell W. Beineke and Robin J. Wilson, Selected Topics in Graph Theory., London, Newyork, san Francisco, 1978.
8. N. Calkin, P. Erdös and T. Tovey, New Ramsey bounds from cyclic graphs of prime order. SIAM J. Discrete Math., 10:381–387, 1997.
9. T. Y. Chang and W. E. Clark, The domination number of 5×n and 6×n grid graphs., J. Graph Theory, 17(1993) 81-107.
10. Gary Chartrand and Linda Lesniak., Graphs & Digraphs, California 93950(1986).
11. G. Chartrand, F. Saba, and C. M. Mynhardt., Prime graphs, prime-connected graphs and prime divisors ofgraphs, Utilitas Math 46(1994), 179-191.

12. G. Chen and R. Schelp. Decomposition of bipartite graphs into special subgraphs., Discrete Applied Mathematics., 155 (2007), 400-404.

13. V. Chvàtal , Tree-Complete Ramsey number J. Graph Theory., 1 (1977), 93.

14. V. Chvàtal, and Harary, F., Generalized Ramsey Theory for graphs III, small off diagonal numbers. Pacific J. Math., 41 (1972), 335-345.

15. E. J. Cockayne, R. M. Dawes, and S.T. Hedetniemi, Total domination in graphs, Networks 10 (1980) 211-219.

16. Alice Dean ,and R. Bruce Richter. The crossing number of $C_4 \times C_4$., Journal of Graph Theory, v 19, no 1, (1995) 125-129.

17. Reinhard Diestel, Graph Theory., Electronic Edition, Spring- er-Verlag Heidelberg, New York (2005). *http://www. Math. uni-hamburg.de/home/diestel/books/graph.theory/.*

18. E. A. Dinic, Algorithmic for Solution of a Problem of Maximum Flow in a Network with Power Estimation, Soviet Math. Dokl., 11 (1970), 1277-1280.

19. M. Douglas, and Van Wieren., Critical cyclic patterns related to the domination number of the torus., discrete Mathematics, 307 (2007) 615-632.

20. Tomasz Dzido and Renata Zakrzewska., The upper dominaton Ramsey number., Discussiones Mathematicae Graph Theory 26(3) (2006), 419-430.

21. J. Ebmonds and R. M. Karp, Theoretical improvements in Algorithmic efficiency for network flow problems, JACM 19 (1972), 248-264.

22. M. El-Zahar, S.Gravier and A. Klobucar, On the total domination of cross products of graphs, Les Cahiers du laboratoire Leibniz, No. 97, January 2004.

23. M.El-Zahar, On Circuits in Graphs, Discrete Math., (1984) 227-230.

24. M.El-Zahar and C.M. Pareek, Domination number of produ- cts of graphs, Ars Combin. 31 (1991) 223-227.
25. M.El-Zahar and R. Shaheen., Domination number of the product of two cycles. Ars Combinatoria, 84(2007), 51-64.
26. M. El-Zahar and R. Shaheen., The domination number C_8xC_n and C_9xC_n, Journal of the Egyptian Mathematical Society, 7(2) (1999), 151-166.
27. P. Erdös, R. J. Faudree, C. C. Roussean and R. H. Schelp., On Cycle-Complete Graph Ramsey Numbers., Journal of Graph Theory, 2(1978) 53-64.
28. G. Exoo, Some new Ramsey colorings., Electronic J. Comb-inatorics 5, No. 1, 29(1998), 1-5.
29. G. Exoo, A Lower Bound for R(5, 5)., J. Graph Theory. 13 (1989), 97-98.
30. R. Faudree and R. Schelp, All Ramsey number for cycles in graphs. Discrete Math., 8 (1974), 313-329.
31. L. R. Ford and Fulkerson, Flows in Networks, Princeton University Press, 1962.
32. L. Gerencsér and A. Gyárfás, On Ramsey-Type problem. Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvö Sect. Math., 10 (1967), 167-170.
33. R. Gould and M. S. Jacobson, On the Ramsey number of tree Versus graphs with large clique number.J. Graph Theory., 7 (1983), 71-78.
34. Ronald Gould, Graph Theory., Emory University, Menlo Park, California New 94025 (1988).
35. Jonathan L. Gross ,and Jay Yellen. Graph Theory and Its Applications., Chapman & Hall/CRC is an imprint of Taylor & Francis Group, (2006). *http://www.taylorandfrancis.com.*,

36. H. Haanpää, A Lower bound for a Ramsey number., Utilitas Mathematica Publishing Inc. Reprinted with permission from Congressus Numerantium 144(2000), 189-191.,

37. H. Hajiabolhassan, Mehrabadi M. L., Tusserkani R., Minimal coloring and strength of graphs, Discrete Mathematics 215 (2000), 265-270.

38. B.L. Hartnell and D.F.Rall, Lower bounds for dominating Cart- esian products, J. Combin. Math. Combin. Comput. 31 (1999) 219-226.,,

39. Teresa W. Haynes, A. Michael Henning and Lora S. Hopkins., Total domination Subdivision numbers of graphs., Discussiones Mathematicaae Graph Theory, 24(3) (2004), 457-467.

40. Teresa W. Haynes, Stephen T. Hedetniemi, and Peter J. Slater., Fundamentals of Domination in Graphs., Marcel Dekker, New York (1998)., *http://www.dekker.com.*

41. M. A. Henning and O.R. Oellermann ., The upper domination Ramsey number u(3,3,3), Discrete Math. 242(2002) 103-113.

42. M. A. Henning and O.R. Oellermann., On upper domination Ramsey numbers for graphs, Discrete Math. 274 (2004) 125-135.

43. M. S. Jacobson and L. F. Hedetniemi., On the domination number of products of graphs:I. Ars Combin 18(1984) 33-44.

44. M.S. Jacobson and L. F. Kinch., On the domination number of products of graphs II: Trees, J. Graph Theory 10 (1986) 97-106.,

45. D. S. Johnson, The NP-Completeness column, an ongoing guide., J. Algorithms, 6(1985), 434-451.

46. Davide E. Johnson,and Johnny R. Johnson., Graph Theory with Engineering Applications., The Ronald press Company. Newyork, 1971.,

47. Hector Juarez,and Gelasio Salazar. Drawings of $C_m \times C_n$ with one Disjoint family II., J. Combin, Theory Ser, B 82 (2001), 161-165.

48. R. M. Karp, Reducibility among combinatorial problems in Complexity of Computer Computations Plenum Press, New York (1972), 85-103.,

49. A. V. Karzanov, Determining the Maximal Flow in a netwo- rk by the method of Perflows., Soviet Math. Dokl., 15 (1974), 434-437.

50. D. J. Kleitman, The crossing number of K(5, n)., J. Combinatorial Theory 9(1970) 315-323.

51. Maran Klesc, R. Bruce Richter, The crossing number of $C_5 \times C_n$., Journal of Graph Theory, 22 (1996) 239-243.,

52. Maran Klesc, The crossing number of $K_{2,3} \times C_3$., Discrete Mathematics 251 (2002), 109-117.

53. Antoanent Klobucar, Total domination numbers of cartesian products., Mathematical communications., 9 (2004), 35-44.

54. Antoanent Klobucar, Independent sets and independent dominating sets in the strong product of paths and cycles., Mathematical communications., 10 (2005), 23-30.

55. Mekkia Kouidr Preben D. Vestergaard, Generalized connected domination in graphs., Discrete Mathematics and Theortical Computer Science., 8(2006), 57-64.

56. Marek Kubale, Graph Colorings., American Mathematical Society., United States, (2004)., *http://www.ams.arg.*

57. E. Kubicka, A. J. Schwenk, An introduction to chromatic sums. Proceeding of 17^{th} Annual ACM Computer Science Conference (1989), 39-45.

?. ...umar, On P_4-Decomposition of graphs., Taiwanese ...urnal of Mathematics., 7(4) (2003), 657-664.

59. C. Kumar Sunil, On P_4-Decomposition of graphs, Taiwan- ese Journal Mathematics, Vol, 7, No 4(2003), 657-664.

60. L. Langley, S. Merz, D. Stewart and C. Ward, α-Domination in tournaments. Congressus Numerantium., 157(2002) 213-218.

61. J. R. Laskar and D. Pillone, Topics on domination in directed graphs. In domination in graphs, Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T., and Slater, P. J., editors. Marcel Dekker, Inc. New York, 1998, 401-437.

62. C. Lee, The domination of in a tournament, J. Kangweon-Kyungki Math. Jour, 9(2001), No.1, 21- 28.

63. C. Lee, Domination in digraphs, J. Korean Math. Soc, 35 (1998), No.4, 843-853.

64. Li Yusheng Li, Z. Wenan, Ramsey Numbers Involving Large Dense Graphs and Bipartite Tura´n Numbers, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 87(2003) 280-288.

65. Bohdan Z. Liberec, Point-Set domatic of graphs., Mathema- tica Bohemica., 1(1999)77-82.,

66. Hye k. Lim, The Lower bound of minus domination number in some special graphs., Korean J. Math. Sciences., 10(2003) 21-24.,

67. A. Ling, Some Applications of Combinatorial Designs to Extremal Graph Theory, Ars Combinatoria, 67 (2003), 221-229.

68. M. Livingston and Q. F. Stout, Constant time Computation of Minimum dominating sets., J. Congressus Numerantium, 105(1994), 116-128.

69. M. Malafiejski, Scheduling Multiprocessor Tasks to minimize mean Flow Time, Ph.D. Thesis, Gdansk University of Technology (2002).,

70. D. McKay, P. Radziszowski, Anew upper bound for the Ramsey number R(5, 5), (1992).

71. D. McKay and P. Radziszowski, R(4, 5) = 25. J. Graph. Theory 19 (1995), 309-322.

72. S. Merz, and D. Stewart, Gallai-type theorems and domination parameters in digraphs. Congressus Numerantium 154(2002) 31-41.,,
73. K. Piwakowski, Applying tabu search to determine new Ramsey graphs. Electron., J. Combin., 3:#R6, 1996.
74. P. Radziszowski, Small Ramsey numbers., The electronic journal of combinatorics (2004), DS1.10.,
75. P. Radziszowski, Small Ramsey numbers. Electron. J. Com-bin., 1:#DS1, 1994. Revision #6: July 5, 1999.
76. F. Ramsey, On aproblem of rormal logic., London Math Soc., 30 (1930), 264-286.
77. R. Bruce Richter and G. Salazar., The crossing number of $C_6 \times C_n$., Austral. J. Combin. 23 (2001), 135-144.
78. Gelasio Salazar, Drawings of $C_m \times C_n$ with one Disjoint family., J. Combin, Theory Ser, B 76 (1999), 129-135.
79. R. Shaheen, Domination Number of Toroidal Grid Digraphs J. Utilitas Mathematica. To appear, Volume 78 March (2009),,
80. R. Shaheen, Algorithms for computing the Domination Graphs, Congressus Numerantium. 152 (2001), 215 - 221.,
81. S. Sheng, Upper bounds for Ramsey numbers, Discrete Mathematics, 270 (2003) 251-265.,
82. D. Sleato, An *O*(nm log n) Algorithm for Maximum Network Flow, Stanford University, Stanford, CA, Computer Science Department report STAN-CS-80-831(1980).
83. Liang Sun, A result on Vizing's Conjecture., Discrete Mathematics., 275 (2004) 363-366.,
84. V. G. Vizing, *The Cartesian product of graphs*, Vycisl. Sist. 9 (1963) 30-43.,,

85. Changping Wang, The signed star domination numbers of the Cartesian product graphs., DiscreteApplied Mathematics., 155(11) (2007) 1497-1505. ,

86. H. Wang, Covering a Graphs with Cycles, Journal of Graph Theory., 20 (1995) 202-211.,

87. D. R. Woodall, Cyclic-order graphs and zarankiewicz's crossing-number conjecture., Journal of Graph Theory, v 17, no 6, (1993) 657-671.

88. Baogen Xu, On signed edge domination numbers of graphs Discrete Math. 239(2001) 179-189.,,,

89. Xiao-li Zou, Xue-gang Chen and Gui-yan Sun., Lower bounds on total signed domination number of graphs., Applied Mathematical Sciences., 50(2007) 2499-2504.

اللجنة العلمية

- د. اسكندر علي أستاذ في كلية العلوم بجامعة تشرين
- د. محمد حسن أستاذ في كلية العلوم بجامعة تشرين
- د. محمد دبش أستاذ مساعد في كلية العلوم بجامعة حلب

المدقق اللغوي

- د. عيسى فارس أستاذ مساعد في كلية الآداب بجامعة تشرين